

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Ю. И. Казаринов**

**ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
С ВЫРЕЗАМИ И ПОВРЕЖДЕНИЯМИ**

*Монография*

Тюмень  
ТИУ  
2017

ББК 22.251  
УДК 539.4  
К 143

*Рецензенты:*

кандидат технических наук, доцент В. Г. Краснов  
кандидат технических наук, доцент Е. Ю. Липатов

**Казаринов, Ю. И.**

К 143 Прочность элементов конструкций с вырезами и повреждениями: монография / Ю. И. Казаринов. – Тюмень: ТИУ, 2017. – 188 с.  
ISBN 978-5-9961-1563-1

В книге предлагается метод определения предельного состояния элементов конструкций с нетрещиноподобными концентраторами напряжений (вырезами и повреждениями). Проанализировано применение данного подхода к элементам конструкций, выполненных из хрупких изотропных или ортотропных (композитных) материалов.

В монографии представлены оригинальные решения нескольких задач теории упругости и механики разрушения: по концентрации напряжений в пластинах конечной ширины с одним и двумя отверстиями и по определению коэффициентов интенсивности напряжений в таких же пластинах, но при наличии радиальных трещин. В процессе решения задач были использованы различные методы для определения напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений: метод сечений, метод суперпозиции сингулярных решений, интегральное преобразование Эрдейи-Кобера и другие методы.

Монография может быть полезна студентам, аспирантам и преподавателям вузов, а также научным и инженерно-техническим работникам исследовательских и проектных организаций.

ББК 22.251  
УДК 539.4

ISBN 978-5-9961-1563-1

© Федеральное государственное  
бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Тюменский индустриальный  
университет», 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
<b>1. АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ</b> .....	7
1.1. Краткий обзор и современное состояние критериев прочности механики сплошной среды .....	7
1.2. Анализ критериев предельного состояния материала с позиций механики трещин .....	12
1.3. Методы решения плоских задач для тел с концентраторами напряжений .....	18
1.4. Выводы по разделу .....	20
<b>2. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ВЫРЕЗОМ ИЛИ ПОВРЕЖДЕНИЕМ</b> .....	22
2.1. Характеристика и описание предлагаемого способа .....	22
2.2. Задача о концентрации напряжений в пластине с отверстием .....	24
2.3. Определение нормальных напряжений в ослабленном сечении пластины .....	31
2.4. Определение коэффициента интенсивности напряжений для полосы с двумя трещинами, выходящими на контур кругового отверстия .....	32
2.5. Расчет предельного состояния пластин с отверстием .....	35
2.6. Экспериментальная проверка способа определения предельного состояния пластины с отверстием .....	36
<b>3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ПОВРЕЖДЕНИЕМ</b> .....	39
3.1. Постановка задачи .....	39
3.2. Определение напряженного состояния пластины с повреждением .....	40
3.3. Определение коэффициента интенсивности напряжений в полосе с двумя радиальными трещинами, выходящими на контур подкрепленного кольцом отверстия .....	42
3.4. Определение упругих характеристик материала в поврежденной зоне конструктивного элемента .....	45
3.5. Определение предельного состояния пластины с повреждением (теория и эксперимент) .....	49
3.6. Заключение по разделу .....	53

4. ВЛИЯНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИИ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН .....	54
4.1. Постановка задачи.....	54
4.2. Определение напряженного состояния в пластине с несколькими отверстиями .....	55
4.3. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для полосы конечной ширины при наличии в ней двух отверстий и четырех радиальных трещин .....	63
4.4. Теоретическое и экспериментальное исследование предельного состояния пластины с двумя отверстиями .....	83
4.5. Заключение по разделу .....	85
5. ПРОЧНОСТЬ ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ВЫРЕЗОМ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ .....	86
5.1. Современные методы определения предельного состояния композиционных материалов.....	86
5.2. Прочность композиционной пластины с эллиптическим вырезом при действии одноосных равномерно распределенных растягивающих напряжений, действующих на ее гранях.....	105
5.3. Предельное состояние ортотропной пластины с эллиптическим вырезом при действии на его поверхности сосредоточенных сил .....	112
5.4. Заключение по разделу .....	115
ОБЩИЕ ВЫВОДЫ .....	116
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	117
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	131
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	131
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	152
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ .....	163
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОНАПРАВЛЕННОГО АРМИРОВАННОГО СЛОЯ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА .....	181

## ВВЕДЕНИЕ

Проведение инженерно-конструкторских разработок при создании перспективных образцов техники, а также оценка технического состояния конструкций в процессе эксплуатации базируются на результатах детального исследования напряженно-деформированного состояния и прочности их ответственных элементов, на требованиях в отношении материалоемкости и надежности их в работе. Удовлетворение указанным требованиям не может быть осуществлено без совершенствования методов прочностного расчета. Расчеты на прочность способствуют установлению уровня эксплуатационных нагрузок, при которых гарантируется безопасная работа машин и конструкций с концентраторами напряжений.

Во многих элементах конструкций и машин имеются концентраторы напряжений, наличие которых обусловлено технологической необходимостью или которые возникли в процессе эксплуатации. Важным моментом при расчете на прочность ослабленных элементов конструкций является правильный выбор способа оценки их предельного состояния на основе имеющихся критериев прочности. Выбор критерия прочности применительно к расчету конкретного элемента конструкции зависит от многих факторов, наиболее важными из которых являются следующие: свойства материала данного элемента, способ нагружения, форма и размеры концентратора, температура окружающей среды и другие факторы.

До настоящего времени в прочностных расчетах при определении предельного состояния элементов конструкций основным мотивом для выбора критерия прочности являлось наличие или отсутствие остроконечного дефекта (трещины). Тогда при наличии трещины в теле в расчетах на прочность используются критерии прочности, основанные на моделировании механизма разрушения в соответствии с теорией механики трещин, а при отсутствии остроконечного дефекта в конструктивном элементе – применяются классические и новые критерии прочности сплошного материала. В последнем случае не учитывается механизм образования и развития трещин.

Однако как показывают результаты многочисленных экспериментальных исследований, перед разрушением элементов конструкций возле концентраторов возникают локальные зоны предельного состояния материала, из которых развиваются трещины. Из-за наличия возникших трещин в процессе нагружения реальная несущая способность таких элементов конструкций получается заниженной по сравнению с расчетной, полученной на основе использования классических критериев прочности. Вместе с тем, при прочностных расчетах элементов конструкций с концентраторами отличающихся от трещин не принято использовать критерии прочности механики разрушения в виду отсутствия трещиноподобных дефектов до нагружения элементов.

В связи с вышеизложенным представляется важной задачей, поставленной жизнью перед инженерами-прочнистами на сегодня, дальнейшее совершенствование критериев прочности для различных материалов, применительно к анализу и проектированию элементов конструкций, ослабленных вырезами и дефектами, отличающихся от трещин.

Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с различными концентраторами используются аналитические, приближенные аналитические, численные и экспериментальные методы [1, 4, 8, 10, 20, 21, 65, 189 и др.]. С помощью аналитических методов можно получить точные решения только для ограниченного числа задач из-за сложности построения точных математических моделей, учитывающих все многообразие факторов, вызывающих деформацию тел. Аналитические решения получены в основном для тел бесконечных размеров. Однако полученные решения в виде формул позволяют провести тщательный анализ напряженно-деформированного состояния тела для различных параметров, входящих в математическую модель, а количество анализируемых решений при необходимости может достигать несколько сотен или тысяч вариантов, рассчитанных за достаточно короткое время, что недостижимо для численных и экспериментальных методов. Применение экспериментальных методов сопряжено со сложностью их реализации, а также из-за наличия резко изменяющихся напряжений возле концентратора. В связи с вышеизложенным и в наше время не потеряли своей актуальности задачи разработки и применения приближенных инженерных и численных методов исследования НДС и прочности конструктивных элементов с вырезами и трещинами.

*Целью работы* является демонстрация применения разработанного автором теоретического способа оценки предельного состояния элементов конструкций с нетрещиноподобными дефектами к пластинам из изотропного и ортотропного материалов с вырезами и повреждениями.

При реализации указанной цели автору самостоятельно для одних задач или в соавторстве для других (материалы опубликованы и ссылка на них есть в списке литературы) удалось найти решение нескольких оригинальных задач (главы 2-5), не решенных другими авторами представленными методами до момента опубликования основного материала монографии в открытой печати.

# 1. АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Напряженное состояние реальных деталей даже при самых простых схемах приложения сил всегда является сложным, так как в подавляющем большинстве случаев все линейные размеры конструктивных элементов, деталей соизмеримы. Поэтому результаты прочностного расчета в значительной степени зависят от принятого критерия прочности, на базе которого можно, исходя из данных о поведении материала при простейших нагружениях, предсказать, когда наступит опасное состояние при действии любой сложной системы напряжений.

Все механические критерии прочности, используемые в современных прочностных расчетах, объединены следующие критерии предельного напряженного состояния. Это критерии предельного состояния материала, основанные на моделировании механизма разрушения, и критерии предельного состояния материала, основанные на позициях механики сплошных сред.

## 1.1. Краткий обзор и современное состояние критериев прочности механики сплошной среды

Наиболее широко в инженерной практике известны следующие четыре классические критерия прочности: наибольших нормальных напряжений, линейных деформаций и касательных напряжений, а также энергетический критерий.

**Критерий наибольших нормальных напряжений**, второе название этого критерия – 1-я теория прочности. В соответствии с этим критерием [107] разрушение материала происходит тогда, когда нормальные напряжения в каком-либо направлении достигают критического для данного материала значения. Последнее устанавливается путем испытания образцов из данного материала при простом растяжении или сжатии.

Опытная проверка показала, что теория наибольших нормальных напряжений удовлетворительно описывает разрушение лишь очень хрупких материалов (камень, керамика, стекло и т. п.) при их растяжении и при условии, что в структуре материала нет явно выраженных дефектов типа трещин. Применительно к материалам, переходящим перед разрушением в макро- и микропластическое состояние, эта теория оказывается несостоятельной.

Критерий **наибольших линейных деформаций** (вторая теория прочности). В основе этой теории [107] лежит предположение о том, что прочность в исследуемой точке будет нарушена, если максимальные линейные деформации достигнут своего опасного предельного значения.

Критерий разрушения, соответствующий теории наибольших линейных деформаций, плохо согласуется с данными экспериментов, а иногда находится в явном противоречии с ними. Удовлетворительные результаты получаются лишь для хрупких материалов или находящихся в хрупком состоянии в тех случаях, когда все главные напряжения отрицательны. В связи с этим в настоящее время вторая теория в практических расчетах почти не применяется.

**Критерий наибольших касательных напряжений** или 3-я теория прочности. По этой теории [107], если наибольшее касательное напряжение в материале достигает своего критического значения, то это единственное условие наступления предельного состояния для всего материала.

Эта теория прочности хорошо подтверждается на практике для материалов, которые одинаково хорошо работают на растяжение и сжатие. К недостатку этого критерия можно отнести то, что ее он не учитывает среднего по величине главного напряжения, оказывающего влияние во многих случаях на прочность материала, хотя, возможно, и незначительное, как показывают опыты.

Ввиду сдвиговой природы необратимых деформаций в металлах критерий наибольших касательных напряжений особенно эффективен при определении начала их пластического течения. В этом случае значение предела прочности материала  $\sigma_B$ , совпадает с пределом текучести материала и критерий представляет собой условие текучести Треска.

Критерий удельной потенциальной энергии формоизменения – 4-я теория прочности (второе название). Критерием прочности, в соответствии этой теорией [107], принимается количество удельной потенциальной энергии формоизменения, которое накоплено в деформированном материале конструкции. При достижении предельного значения удельной потенциальной энергии формоизменения материала и вследствие наступления его текучести достигается опасное состояние деформированного элемента, согласно этой теории.

Поскольку потенциальная энергия – величина положительная независимо от знака деформации, то рассматриваемая теория применима лишь к материалам, одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию. Удельная энергия формоизменения с точностью до постоянного множителя совпадает с касательными напряжениями на площадке, равнонаклоненной к трем главным осям. Поэтому этот критерий можно рассматривать также как критерий октаэдрических касательных напряжений.

Четвертая теория прочности получила широкое распространение для описания условий перехода различных материалов в пластическое состояние, причем она дает более точные результаты, чем критерий наибольших касательных напряжений. В такой трактовке рассматриваемый критерий известен в литературе также как условие текучести Мизеса.

Критерий Кулона-Мора [107]. Предполагается, что прочность материала, в соответствии с этим критерием, зависит главным образом от вели-

чины и знака наибольшего  $\sigma_1$  и наименьшего  $\sigma_3$  главных напряжений для общего случая напряженного состояния конструктивного элемента (погрешность, обычно не превышает 12...15% и связана с тем, что не учитывается напряжение  $\sigma_2$ ). Поэтому любое напряженное состояние можно представить одним кругом Мора, который строится по главным напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , следуя этому предположению. При этом построенный на этих напряжениях круг Мора будет называться предельным, если при данных  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  нарушается прочность материала.

Теория прочности Кулона-Мора обладает существенным преимуществом перед 1-й и 2-й теориями и позволяет описать поведение материалов при разрушении, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию (хрупких материалов).

Огибающие кругов Мора разные авторы интерпретировали аналитически различными кривыми и тем самым значительно расширили возможности теории. Предлагались различные виды огибающей главных кругов Мора как частные выражения зависимости касательного напряжения  $\tau = f(\sigma)$ : прямая [81], парабола [130], циклоида [131], кривая Перлина [146] и др.

Отличаясь большой шириотой в смысле охвата явлений, обнаруживаемых при опыте, теория Мора продолжала совершенствоваться и развиваться [30, 139, 152, 156]. Подробное изложение этой теории и ее критический анализ имеется в работах [81, 122, 139].

Классические критерии прочности впоследствии получили свое развитие в новейших энергетических и деформационных критериях.

Однако, разработку теории прочности очень задерживает отсутствие необходимого экспериментального и теоретического материала о механизме пластической деформации. Поэтому, чисто феноменологический подход многих исследователей при выдвигании новых гипотез можно считать на данном этапе развития науки о прочности вполне обоснованным.

Большинство новейших энергетических теорий укладывается в рамки высказанной А. Надаи [81] гипотезы о том, что в предельном состоянии октаэдрическое касательное напряжение  $\tau_{\text{окт}}$  является функцией октаэдрического нормального напряжения  $\sigma_{\text{окт}}$  записывается в виде зависимости

$$\tau_{\text{окт}} = f(\sigma_{\text{окт}}),$$

Так Ф. Шлейхером была предложена гипотеза [201], по которой следует, что опасное состояние материала наступает при определенном значении полной удельной потенциальной энергии, причем критическое значение для нее является функцией шарового тензора. Гипотеза Шлейхера плохо подтверждается имеющимися экспериментальными данными и поэтому не получила распространение.

Еще более универсальной является гипотеза Бужинского [166], согласно которой опасное состояние материала наступает при достижении

энергией, состоящей из энергии формоизменения и некоторой части энергии изменения объема, определенного критического значения, являющегося в свою очередь линейной функцией шарового тензора.

С гипотезой Бужинского тождественно совпадает теория прочности Ю. И. Ягна [168], хотя она базируется на совершенно других представлениях. Исходя из геометрических соображений о форме предельной поверхности изотропных материалов Ю. И. Ягн полагает, что уравнение поверхности, интерпретирующей теорию прочности в пространстве напряжений, необходимо искать в виде уравнения второй степени, которое симметрично по отношению ко всем трем главным напряжениям.

П.П. Баландиным [7] был предложен критерий прочности, основанный на предположении, что предельное значение удельной потенциальной энергии формоизменения является функцией шарового тензора, причем в первом приближении эта функция принята линейной. Легко показать, что такая гипотеза является частным случаем гипотезы Бужинского.

Аналогичное уравнение было предложено Г. А. Гениевым [30] как своего рода обобщение критерия прочности Мора и теории наибольших нормальных напряжений. Систему предельных поверхностей, составленную тремя парами плоскостей, параллельных координатным (критерий наибольших нормальных напряжений), и поверхность, интерпретирующую в пространстве напряжений критерий Мора, Г.А. Гениев предлагает аппроксимировать параболоидом вращения, ось которого наклонена к осям координат, а вершина находится в точке, соответствующей пределу прочности при всестороннем растяжении. Уравнение этого параболоида принимается за условие прочности.

Дальнейшее обобщение гипотезы с целью ограничения области предельного сопротивления при плоском напряженном состоянии, в частности при двухосном сжатии, Г. А. Гениев и В.Н. Киссюк предлагают провести путем введения в общее условие прочности третьего инварианта девиатора напряжений [31].

Предполагая, что между касательными и нормальными напряжениями в октаэдрической плоскости существует линейная зависимость, А. И. Боткиным впервые было предложено следующее условие прочности:

$$\tau_{\text{окт}} \leq m(n + \sigma_{\text{окт}}),$$

где коэффициенты  $m$  и  $n$  находятся через пределы прочности при растяжении и сжатии.

Рассмотрим еще некоторые теоретические работы, посвященные вопросу оценки прочности материалов при сложном напряженном состоянии, в основу которых положены в качестве критериев функции деформации или функции напряжений.

Г. А. Дошинский [45] считает, что наступление предельного состояния материала определяется величиной абсолютных значений компонентов деформаций. Общей мерой этой величины служит среднее квадратичное от  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ . Для распространения такого предположения на хрупкие материалы Г.А. Дошинский [45] принимает, что предельное значение среднеквадратичной деформации линейно зависит от относительной величины объемной деформации.

В отличие от теории А.И. Боткина условие Г.А. Дошинского учитывает влияние на прочность упругих характеристик материала. Это имеет смысл, так как упругое поведение хрупких материалов наблюдается почти до разрушения.

А. Ю. Ишлинским предложена «гипотеза прочности формоизменения», которая, как отметил сам автор, в известном смысле сочетает идеи гипотез Губера-Мизеса и Кулона [50].

За факторы, определяющие начало текучести, здесь принимаются величины, характеризующие формоизменение элемента материала.

Предел текучести при чистом сдвиге, согласно этой теории, должен составлять  $2/3$  предела текучести при растяжении:

$$\tau_k = 0,667\sigma_T,$$

В работе [67] описана гипотеза, предложенная А. Ф. Липатовым. Эта гипотеза исходит из учета изменчивости хрупко-пластических свойств материала в зависимости от шарового тензора: с увеличением всестороннего сжатия хрупкий материал приобретает пластические свойства и, начиная с определенной величины гидростатического давления, ведет себя как пластическое тело, разрушаясь при значительных деформациях.

Недостатком критерия Липатова является игнорирование промежуточного нормального напряжения  $\sigma_2$ , влияние которого на предельное состояние материала можно считать доказанным.

Гипотеза Зенделя, описанная в работах [107] и [122], основывается на предположении, что предельное состояние материала наступает, когда максимальная деформация сдвига  $\gamma_{max}$  достигает определенной величины, зависящей от средней линейной деформации.

К аналогичному выводу пришли Н. Н. Давиденков и И. И. Тарасенко [43, 148].

Для хрупких материалов условие прочности, по мнению И. И. Тарасенко [148], следует искать в виде

$$\sigma_1 + k\sigma_0 = const,$$

При сравнении результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными было замечено, что для каждой гипотезы есть область напряженных состояний, в которой теория наиболее хорошо согла-

суется с опытом. Это обстоятельство привело к мысли о целесообразности разделения предельной поверхности на ряд поясов, из которых один пояс может оказаться, например, цилиндром, другой – конусом и т. д.

Концепция о невозможности описания предельного состояния материала одним уравнением наиболее ярко выражена в объединенной теории прочности Давиденкова-Фридмана [43].

На целесообразность разделения предельной поверхности на ряд поясов указывали также Бекер [22], Буртон [175], Давиденков [43], Вайглер [210] и др.

Критерий прочности материала в работе [108], авторов Г.С. Писаренко и А. А. Лебедева, предлагается искать в виде инвариантных по отношению к напряженному состоянию функций касательных напряжений и максимального нормального напряжения считая, что наступление предельного состояния обусловлено способностью материала оказывать сопротивление как касательным, так и нормальным напряжениям,. Предложен, например, критерий в следующей линейной форме [108]:

$$\tau_{окт} + m_1 \sigma_1 \leq m_2, \quad (1.1)$$

где константы  $m_1$  и  $m_2$  материала выражаются через предельные напряжения  $\sigma^0$  и  $\sigma_-^0$  при одноосном растяжении-сжатии. Тогда условие (1.15) примет вид

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{окт} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma^0, \quad \chi = \sigma^0 / \sigma_-^0. \quad (1.2)$$

Для материалов, находящихся в пластическом состоянии,  $\sigma^0 = \sigma_-^0$ ,  $\chi = 1$  и выражение (1.2) преобразуется в уравнение теории формоизменения для практических расчетов. При этом для идеально хрупкого материала  $\chi = 0$  выражение (1.2) преобразуется в уравнение для первой теории прочности.

Предельная поверхность (1.2) представляет собой фигуру равнонаклоненную к главным осям, в которую вписана шестигранная пирамида, и которая в свою очередь соответствует упрощенной теории прочности Мора (при  $0 \leq \chi \leq 1$ ).

Более обширное и подробное описание критериев прочности можно найти в работах [71, 81, 107, 108, 122, 131].

## **1.2. Анализ критериев предельного состояния материала с позиций механики трещин**

Наличие в реальном теле остроконечных концентраторов напряжений, в частности дефектов типа трещин, принципиально усложняет его расчет на прочность. В таких случаях классические подходы механики сплошных сред

приводят к некорректным результатам. Не существует моделей и критериев в классических теориях прочности для расчета предельного состояния материала, находящегося в хрупком состоянии и имеющего остроконечные дефекты типа трещин. В этих теориях не учитывается особое напряженно-деформированное состояние материала около вершины остроконечного дефекта – трещины в процессе деформации тела, что не позволяет решить задачу о прочности элементов конструкций, изготовленных из этого материала. Это обусловлено тем, что радиус закругления вершины такого концентратора соизмерим с параметрами структуры самого материала.

Основная идея неклассического подхода (механики разрушения материалов) сводится к следующему. Считается, что переход элемента деформируемого тела из сплошного состояния в состояние разрушения сопровождается промежуточным состоянием, которое следует обязательно учитывать при решении задачи о прочности тела с дефектами типа трещин. Важнейшей особенностью областей деформируемого твердого тела, в которых возникает состояние предразрушения (области предразрушения) заключается в том, что материал в них всегда деформирован за предел упругости и что именно в них происходит наиболее интенсивное пластическое течение, взаимодействие с окружающей средой, диффузионные процессы, повреждаемость материала и другие явления, предопределяющие в конечном счете локальное разрушение материала.

Следовательно, при оценке прочности твердого тела необходимо учитывать его локальные физико-механические свойства, например, способность оказывать сопротивление распространению в нем трещин – его трещиностойкость. Учет состояний предразрушений материала в рамках механики сплошных сред требует введения новых (по сравнению с классическими) расчетных моделей и концепций. Поскольку основными характеристиками, контролирующими поведение материала в вершине трещины, являются напряжения, деформации и энергия, то все критерии механики разрушения: аналогично классическим теориям прочности, делятся на энергетические, силовые и деформационные [5,53–55,94–101, 122, 156, 169].

Рассмотрим вначале энергетические критерии разрушения и в первую очередь **критерий Гриффитса-Орвана**.

А.А. Гриффитс [184] на основании опытов по разрушению тел сделал вывод, что распространение трещины приводит к уменьшению энергии упругих деформаций тела за счет его разгрузки вблизи распространяющейся трещины и увеличения его поверхностной энергии в результате образования новых поверхностей тела.

Е. О. Орван [196] и другие исследователи в 1950-е годы распространили концепцию Гриффитса на квазихрупкое разрушение материалов. Е.О. Орван предложил изменить подход А. А. Гриффитса при изучении распространения трещины в квазихрупком материале, таким образом, наряду с поверхностной энергией материала учитывать также удельную ра-

боту пластической деформации, сосредоточенную в тонком слое у контура трещины, т.е. работу, затрачиваемую на образование единицы новой поверхности.

Таким образом, концепция Гриффитса была распространена на металлические материалы. Однако этот подход справедлив для малых пластических зон, и, следовательно, условий ограничения на материалы и геометрические параметры тел теория Гриффитса-Орована не содержит.

Применительно к идеально упруго-пластическим телам энергетический критерий предельного равновесия тел с трещинами сформулирован в работе [81] как *интегральный вариационный принцип теории трещин*, в котором, кроме того, указаны также условия для определения характеристик зоны предразрушения.

Общий энергетический подход к описанию развития трещины в произвольных сплошных средах, основанный на представлении о «тонкой структуре» конца трещины, изложен Г.П. Черепановым [164].

**Критерий  $R$ -кривых** [98]. Для описания разрушения, когда у контура трещины возникают зоны больших пластических деформаций и если размеры этих зон соизмеримы с размерами тела и трещины, применяют более общие энергетические подходы, которые основаны, как и теория Гриффитса, на балансе скоростей изменения составляющих энергии деформированного тела в процессе развития трещины. Если выполняется равенство

$$G_I = R.$$

где  $G_I$  – потенциальная энергия тела при расширении трещины,  $R$  – удельное сопротивление увеличению длины трещины в материале, то рост трещины устойчивый и поэтому данное равенство используется для описания такого роста.

Метод  $R$ -кривых уязвим, поскольку в нем не учтена вся геометрия тела и условия нагружения.

**Критерий  $J$ -интеграла** (критерий Черепанова-Райса [115, 164]). В этом критерии разрушения не предполагается никаких ограничений ни на размер пластической области, ни на степень докритического роста трещины. Если в упругопластическом теле с трещиной напряжения монотонно возрастают и разгрузки нигде нет, то поведение такого материала может быть описано соотношением нелинейной теории упругости.

Согласно критерию  $J$ -интеграла трещина начинает расти, когда  $J$ -интеграл достигает критического значения, постоянного для данного материала, т.е. когда  $J = J_{Ic}$ . Величина  $J_{Ic}$  считается характеристикой материала и называется предельным (критическим) значением  $J$ -интеграла.

Для экспериментального определения величины  $J_{Ic}$  используют метод испытания образцов, которые отличаются лишь длиной трещины. Впервые экспериментальный метод определения трещиностойкости материала в

виде эффективной поверхностной энергии был предложен В. В. Панасюком и С. Е. Ковчиком [94].

Для определения величины  $J_{Ic}$  очень важно точно установить, когда же начинается рост трещины. Однако по диаграмме нагрузка-перемещение момент роста трещины уловить трудно, ибо различить на ней нелинейности, связанные с ростом трещины, сложно.

Используемые в вышеперечисленных критериях предельного равновесия тел с трещинами величины  $\gamma_n$ ,  $R_c$ ,  $J_{Ic}$  характеризуют степень сопротивления материала распространению в нем трещин и поэтому названы характеристиками трещиностойкости материалов.

Несмотря на то, что исторически первым критерием механики разрушения был предложенный А.А. Гриффитсом энергетический [183], наиболее широкое распространение в инженерных приложениях получили силовые подходы, связанные с использованием введенного Дж. Р. Ирвином понятия коэффициента интенсивности напряжений [189]. Описание разрушения с этих позиций отличается относительной простотой и ясностью, поскольку исключается применение таких трудноопределимых характеристик как истинная поверхностная энергия, работа локальной пластической деформации, которые фигурируют в других подходах и критериях.

**Силовые критерии хрупкого и квазихрупкого разрушения.** Поскольку для идеально упругого тела напряженно-деформированное состояние у фронта трещины размера  $l$ , вызванное внешней нагрузкой  $\sigma$ , полностью определяется коэффициентами интенсивности напряжений  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , именно эти величины и лежат в основе силовых критериев линейной механики разрушения. В этом случае критериальное уравнение будет содержать параметры  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , а также некоторые константы материала  $C_i$ , т.е. его можно записать так [158]:

$$F(K_1, K_2, K_3, C_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.3)$$

Соотношение (1.3) описывает в координатах  $(K_1, K_2, K_3)$  некую предельную для данного материала поверхность, при достижении которой трещина переходит из устойчивого в неустойчивое состояние (начинает распространяться).

Впервые критерий типа (1.3) был предложен Дж. Р. Ирвином [190] для разрушения квазихрупких тел по механизму нормального отрыва. Формулируется он следующим образом: трещина начинает распространяться в том случае, если коэффициент интенсивности напряжений достигает критического для данного материала значения:

для плоской деформации

$$K_I = K_{Ic}, \quad (1.4)$$

для плоского напряженного состояния

$$K_{1*} = K_c, \quad (1.5)$$

Здесь  $K_{1*} = K_1(\sigma_*, l)$ , где  $\sigma_*$  – предельное значение приложенной нагрузки  $\sigma$ .

Аналогично критерию Ирвина условие страгивания трещины при поперечном сдвиге ( $K_1 = K_3 = 0$ ) представляется в виде

$$K_{2*} = K_{2c} \quad (K_{2*} = K_2(\sigma_*, l)), \quad (1.6)$$

а при продольном сдвиге ( $K_1 = K_2 = 0$ ) – в виде

$$K_{3*} = K_{3c} \quad (K_{3*} = K_3(\sigma_*, l)), \quad (1.7)$$

Принципиальное различие величин, расположенных в левой и правой частях критериальных соотношений (1.6), (1.7) заключается в том, что  $K_{1*}$ ,  $K_{2*}$ ,  $K_{3*}$  отражают геометрическую форму тела с трещиной и условия его нагружения.  $K_{1c}$ ,  $K_{2c}$ ,  $K_{3c}$  – характеристики материала, которые по аналогии с пределами текучести и прочности, остаточным удлинением и др. отражают вполне определенное свойство материала – способность сопротивляться распространению в нем трещин (его трещиностойкость).

Для микронеоднородного тела, в котором для отдельных его составляющих совместно реализуются различные механизмы разрушения, функциональная зависимость (1.3) имеет более сложный вид.

Выполнение критериев (1.4)-(1.7) свидетельствует о наступлении предельного равновесного состояния тела с трещиной. Однако в таком состоянии рост трещины может быть как устойчивый, так и неустойчивый. Во втором случае трещина начинает двигаться по достижении нагрузкой критического значения, определяемого из критерия разрушения. Область неустойчивых состояний равновесия характеризуется неравенствами

$$d\sigma/dl \leq 0 \quad \text{или} \quad dK_i/dl \leq 0.$$

Между силовыми и энергетическими критериями разрушения существует связь. Так, для плоской деформации

$$K_{1c}^2 = \frac{Eg_{1c}}{1-\mu^2}, \quad (1.8)$$

для плоского напряженного состояния

$$K_{1c}^2 = Eg_{1c},$$

где

$$g_{1c} = \begin{cases} 2\gamma, & \text{для хрупкого тела,} \\ U_{1c} & \text{для упругопластического тела.} \end{cases}$$

Зависимости (1.8) часто используются при комбинированном применении энергетических и силовых критериев для определения прочности упругопластических тел с трещинами по одному критерию, а характеристики трещиностойкости его материала – по другому, в техническом отношении легко реализуемому.

В зависимости от пластических свойств материала, сложности геометрии элемента конструкции и содержащихся трещин, а также характера напряженно-деформированного состояния в нем выбирается тот или иной подход к определению предельного равновесного состояния. Для металлов, обладающих повышенной пластичностью, более эффективен деформационный подход. В его основу положены деформационные критерии локального разрушения тел с трещинами, которые наиболее полно соответствуют разрушению пластичных материалов и вместе с тем практически могут быть реализованы для многих тел с трещинами.

**КРТ–критерий.** В расчетах дефектных материалов на прочность с применением КРТ-критерия используют классический деформационный критерий прочности [136]

$$\varepsilon_{max}(l, \sigma_*) = \varepsilon_c,$$

где  $\varepsilon_{max}$  – максимальная растягивающая деформация в окрестности трещины (зоне предразрушения) длиной  $l$ ;  $\sigma_*$  – предельное напряжение, приложенное симметрично плоскости трещины к упругопластическому телу извне;  $\varepsilon_c$  – предельная растягивающая деформация для материала тела. Экспериментально установлено, что этот критерий наиболее применим для материалов с повышенной пластичностью, однако трудно реализуем в прямом применении для тел с трещинами, так как предполагает определение величины  $\varepsilon_{max}$  в зоне предразрушения.

**Двухпараметрический деформационный критерий.** Локальное разрушение трехмерных тел с трещинами и большой текучестью материала за ее пределом  $\delta_k$  – модель уже не может достаточно корректно описать. Для таких случаев предлагается двухпараметрический деформационный критерий [87]. Этот критерий называется двухпараметрическим так как содержит одновременно две группы базовых параметров, характеризующих свойства материала – трещиностойкость и макропластичность (пластичность больших объемов).

**Деформационный критерий для тел с щелевыми дефектами.** Этот критерий позволяет определить критическое значение внешней нагрузки для тел как с острыми трещиноподобными дефектами, так и с дефектами, вершины которых закруглены [87].

Более подробный обзор механических критериев предельного напряженного состояния имеется в работах [11, 34, 53, 71, 81, 107, 108, 122, 131].

### 1.3. Методы решения плоских задач для тел с концентраторами напряжений

Оценка несущей способности элементов конструкций с концентраторами включает в себя два основных этапа: 1) формулировка физико-механических концепций и критериев локального разрушения материала в зоне концентрации напряжений; 2) составление на этой основе критериальных уравнений и определение поля напряжений и деформаций около концентратора в нагруженном элементе.

Подходы, используемые исследователями на первом этапе, изложены в разделах 1.1, 1.2. На втором этапе необходимо в наиболее эффективной для рассматриваемых задач форме построить общее решение дифференциальных уравнений упругого равновесия тел с концентраторами, а затем по заданным граничным условиям и полученному общему решению свести задачу к соответствующим критериальным уравнениям и разработать методы решения этих уравнений. В литературе известно множество различных методов и их модификаций для решения задач теории упругости. В данном разделе изложены некоторые основные методы решения статических задач теории упругости и механики трещин.

Для решения плоских и антиплоских задач теории упругости для тел с вырезами и трещинами широко используются методы *теории функций комплексного переменного* (подходы *Мухелишвили* [79,80], *Савина* [123], *Вестергарда* [203], *Си* [202], *Райса* [197], *Лебера* [190]). При помощи этого метода решены разнообразные задачи о растяжении плоскости с одним эллиптическим вырезом или рядом круговых отверстий, о полубесконечной трещине и трещине конечной ширины в бесконечном упругом теле [132, 133, 202] и другие [79, 94, 188] с использованием техники конформных отображений или [79, 190] когда отображающая функция имеет вид полинома или дробно-рациональной функции.

Некоторые сложные плоские и пространственные задачи механики трещин решены с применением метода асимптотических разложений [164].

Эффективные решения задач теории упругости найдены с помощью интегральных преобразований [80, 104, 132, 137, 197].

Для решения плоских и пространственных задач теории упругости и механики трещин также используется аппарат *сингулярных интегральных уравнений* [87, 89, 111, 176]. Этим методом решены задачи о взаимодействии пустот эллипсоидной формы в полубесконечном пространстве, об одной произвольно ориентированной трещине в полосе, о полосе с краевыми трещинами, о периодической системе трещин произвольной ориентации в упругой полосе и многие другие.

Подробный обзор плоских и пространственных задач теории упругости и механики трещин, решенных с помощью аналитических методов приведен в работах [2, 22, 65, 67, 86, 88–92, 99, 103, 106]. Имеется ряд справочников по коэффициентам концентрации и интенсивности напряжений [125, 140, 201].

Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с концентраторами является сложной математической задачей. Применение аналитических методов для решения большинства задач ограничено, и, зачастую, весьма трудоемко. На практике для задач со сложной геометрией и условиями нагружения чаще всего применяются различные численные методы. Появление и развитие ЭВМ привело к повышению эффективности численных методов, распространение которых вначале сдерживалось слабыми возможностями вычислительных машин, т.к. требовалось обрабатывать значительные объемы вычислительных операций и перерабатываемой информации.

Численные методы расчета НДС, как правило, основываются на дискретизации исходной задачи. Относительно дискретизованной задачи предполагается, что ее решение может быть полностью определено конечным набором числовых коэффициентов (параметров). Эти коэффициенты часто связывают со значениями искомой функции в конечном множестве точек – узлов некоторой сетки, нанесенной на рассматриваемую область. В этом случае говорят о сеточных методах, к числу которых относятся *метод конечных элементов* (МКЭ), *метод конечных разностей* (МКР), *метод граничных элементов* (МГЭ) и некоторые другие численные методы.

В соответствии с процедурой МКЭ [8, 29, 74, 77, 133, 147, 180] рассматриваемую область разбивают на конечные элементы – небольшие подобласти, форма которых допускает простое параметрическое описание. Наиболее распространенные схемы МКЭ – смешанные и гибридные схемы, где неизвестными одновременно являются узловые перемещения и напряжения либо другие комбинации искомым функций [29, 90, 98, 119, 117, 151].

Другим наиболее распространенным численным методом после МКЭ является метод конечных разностей [26, 46, 126, 147]. Этот метод основан на замене дифференциальных уравнений соответствующими уравнениями в конечных разностях.

В настоящее время все большее внимание исследователей привлекают методы решения задач упругого равновесия, основанные на составлении и численном решении граничных интегральных уравнений. Метод граничных элементов [10, 20, 21, 40, 65, 147, 149, 157] успешно применяется в качестве универсального численного метода решения задач теории упругости и механики трещин. С его помощью можно решать задачи с использованием дискретизации только границы области, в то время как МКЭ и МКР этого не позволяют.

Метод потенциала [56, 68] сводит краевые задачи механики упругого тела к соответствующим интегральным уравнениям. Метод позволяет по-

нижать размерность задачи, поэтому часто применяется при решении трехмерных задач.

Метод граничных коллокаций (МГК) [180] позволяет вместо дифференциальных уравнений использовать систему линейных алгебраических уравнений. Метод значительно упрощает решение задачи, однако область его применения ограничена. Кроме перечисленных методов в последнее время ведутся разработки комбинированных численных методов.

Наряду с описанными выше аналитическими и численными методами в расчетах на прочность широкое распространение получили приближенные методы, основанные на использовании гипотезы плоских сечений, используемой в сопротивлении материалов.

Несмотря на высокую эффективность современных численных методов экспериментальные методы широко используются при решении задач прочности ослабленных элементов конструкций. Это обусловлено тем, что на практике очень часто встречаются задачи по исследованию НДС конструктивных элементов, не имеющие теоретического решения. К основным группам экспериментальных методов исследования НДС деталей и элементов машин относятся электротензометрический, поляризационно-оптический, проникающих излучений, муаровых полос и делительных сеток, оптически чувствительных покрытий, хрупких тензочувствительных покрытий. Наиболее полное описание экспериментальных методов дано в работах [58, 60, 84, 105, 163, 164, 174].

#### **1.4. Выводы по разделу 1**

В настоящее время имеется два основных подхода для описания предельного состояния нагруженного тела. Первый подход применяется для расчета прочности сплошных материалов и описывает предельное состояние в точке.

Существует ряд частных теорий [107,131], которые позволяют оценить прочность сплошного материала. При построении критериев прочности, как правило, учитывают только один параметр, характеризующий прочность на разрыв ( $\sigma_B$ ), пластичность ( $\sigma_T$ ) или деформативность ( $\epsilon_C$ ) реального материала. Эффективность расчетов по этим критериям во многом зависит от выбора того из них, который наиболее соответствует реальным свойствам используемого материала и условиям его работы. Наряду с этим сложность в выборе критерия прочности часто обусловлена наличием в теле концентратора (например, отверстия), который вносит существенное перераспределение напряженного состояния. При этом предельное состояние материала достигается не во всем теле сразу, а лишь в ограниченном объеме. Однако, как показывает опыт, разрушение всего тела не происходит тотчас по достижении предельного состояния в какой-либо точке на-

груженого тела с концентратором. Для полного разрушения необходимо увеличить нагрузку на испытываемый элемент. При этом величина критического номинального напряжения  $\sigma_{\text{к}}^{\text{НОМ}}$ , подсчитанного по ослабленному сечению пластины с отверстиями, значительно меньше предела прочности  $\sigma_{\text{В}}$  данного материала.

Таким образом, критерии прочности, рассматривающие наступление предельного состояния тела с позиции сплошности материала, несостоятельны для тел с концентраторами типа отверстие.

Второй подход в теории прочности связывает наступление предельного состояния тела с появлением трещин [75, 166, 173]. При этом необходимо учитывать локальные физико-механические свойства твердого тела и, в первую очередь, способность оказывать сопротивление распространению в нем трещин. Важнейшей особенностью локальных областей деформируемого твердого тела, в которых возникают состояния предразрушения, заключается в том, что материал в них всегда деформирован за предел упругости и что именно в них происходит наиболее интенсивное пластическое течение, предопределяющее, в конечном счете, локальное разрушение материала. Поэтому методы механики разрушения нельзя в чистом виде использовать для определения критической нагрузки в телах с концентраторами, отличными от трещин, т.к. нетрадиционные концентраторы создают менее значительное локализованное напряженное состояние, чем трещины.

На основании вышесказанного можно делать следующие выводы.

Классические и новые критерии прочности описывают предельное состояние материала в точке и для их использования необходимо, чтобы предельная нагрузка была достигнута по всему сечению тела. В противоположность этому критерии механики разрушения позволяют определять предельную нагрузку для тела с трещиной, когда критическая нагрузка достигается в весьма малом объеме тела. Поэтому можно предположить, что расчет критического состояния тел с концентраторами, отличными от трещин, должен включать в себя, с одной стороны, определение предельного напряженного состояния в теле с концентратором с учетом сплошности материала, а с другой стороны – использование методов механики разрушения с момента зарождения трещин в наиболее напряженном месте.

В прочностных расчетах широко применяются экспериментальные, аналитические, приближенные аналитические и численные методы, обзор которых дан выше, для определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при наличии концентраторов напряжений.

С использованием аналитических методов можно получить точное решение, но лишь для ограниченного круга задач, ввиду сложности построения точной математической модели, которая бы учитывала все многообразие силовых и температурных факторов, влияющих на напряженное состояние элементов конструкций. Получены аналитические решения, в основном, для тел бесконечных размеров. При использовании эксперимен-

тальных методов сложности возникают при измерении больших градиентов напряжений возле концентратора. Учитывая вышеизложенное, весьма актуальной задачей на сегодня остается разработка численных и приближенных инженерных методов определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при наличии концентраторов напряжений с вырезами и трещинами.

## **2. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ВЫРЕЗОМ ИЛИ ПОВРЕЖДЕНИЕМ**

В настоящее время существует два подхода для определения предельного состояния нагруженного тела. Классические и ряд новых критериев прочности [107, 131] дают возможность установить предельное состояние материала в точке. Согласно этим критериям предельная нагрузка для тела будет соответствовать такому случаю, когда предельное состояние материала будет достигнуто во всех точках опасного сечения. В противоположность этому, критерии механики разрушения [75, 162, 172] позволяют определять предельную нагрузку для тела с трещиной, когда критические напряжения достигаются в весьма малом объеме тела.

На основании этого можно предположить, что расчет критического состояния тела с концентратором, отличным от трещины, должен включать в себя, с одной стороны, определение протяженности зоны предельного состояния материала возле концентратора на основании использования критерия прочности сплошного материала, а с другой стороны – применение критерия механики разрушения для определения критического размера этой зоны.

В данной главе рассматривается вопрос об определении предельного состояния изотропной пластины конечной ширины, ослабленной центральным круговым отверстием (вырезом) или пробоем и подверженной равномерному растяжению в одном направлении. Расчеты основаны на совместном использовании критериев прочности материала механики сплошных сред и механики разрушения.

### **2.1. Характеристика и описание предлагаемого способа.**

Из экспериментальных данных известно, что в момент разрушения пластины с отверстием предельное напряженное состояние не достигается по всему ослабленному сечению. По достижении некоторой нагрузки возле отверстия в опасном сечении возникает зона предельного состояния материала. В этой зоне будет наблюдаться нарушение сплошности материала.

ла, что эквивалентно образованию трещины. При дальнейшем увеличении нагрузки зона предельного состояния (трещина) будет увеличиваться до тех пор, пока трещина не достигнет критической длины. После чего произойдет практически мгновенное разрушение пластины.

За модель статического разрушения хрупких материалов принимаются следующие условия:

$$\sigma_{\text{экв}} \geq \sigma_B \vee \sigma_I \geq S_k \quad (2.1)$$

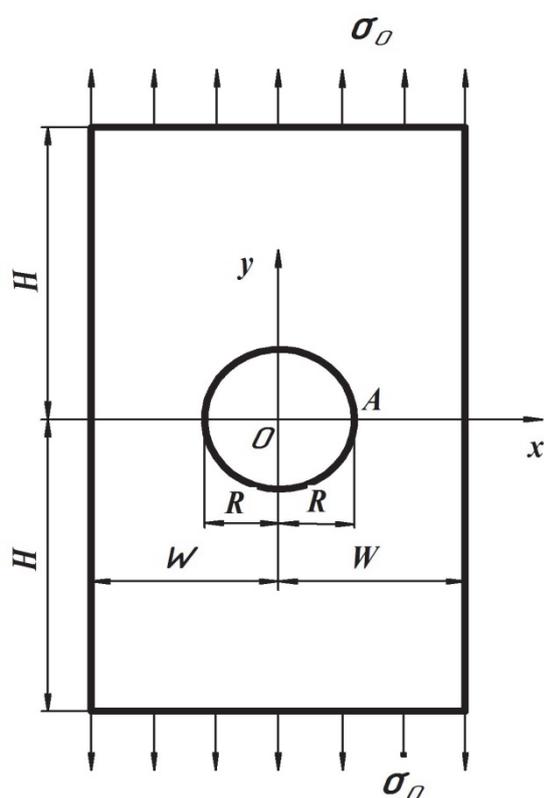


Рис. 2.1. Пластина с центральным круговым отверстием

где  $\sigma_{\text{экв}}$  определяется по теории прочности Писаренко-Лебедева;  $\sigma_B$  – предел прочности;  $\sigma_I$  – главное напряжение;  $\vee$  – знак логического суммирования;  $S_k$  – истинное сопротивление отрыву.

В качестве условия разрушения используется условие Ирвина

$$K_I = K_c \quad (2.2)$$

где  $K_I$  и  $K_c$  – коэффициент интенсивности напряжений (КИН) нормально-го отрыва и его критическое значение в случае плоского напряженного состояния.

Рассмотрим применение предложенного способа для определения предельного состояния растянутой пластины конечной ширины с центральным круговым вырезом (рис.2.1). Боковая поверхность полосы и контур отверстия свободны от внешних нагрузок. На достаточном

удалении от отверстия в поперечных сечениях полосы действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения.

Ниже более подробно описывается сущность разработанного способа. Для решения поставленной задачи, т.е. для определения критического размера зоны предельного состояния материала возле концентратора напряжений, нам необходимо иметь две расчетные кривые (рис. 2.2). Кривая 1, на рисунке 2.2, характеризует зависимость длины зоны предельного состояния материала  $d$  возле отверстия от величины напряжения  $\sigma_0$ , приложенного к торцам пластины. Кривая 2 – это зависимость критического напряжения на торцах пластины от длины радиальной трещины  $d$ , выходящей на контур отверстия в опасном сечении. Абсцисса этой точки пересечения дает критический размер  $d_k$  зоны предельного состояния материала,

а ордината – значение напряжения на торцах пластины, при котором произойдет разрушение элемента.

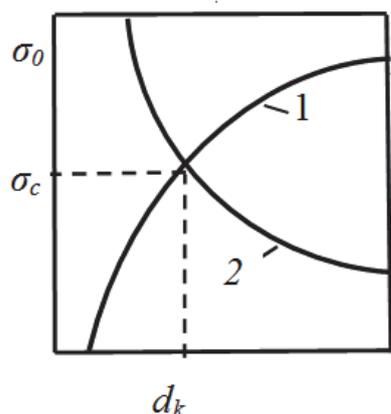


Рис. 2.2. Определение предельного состояния пластины с отверстием

Для определения размера зоны предельного состояния материала возле отверстия необходимо решить упруго-пластическую задачу о концентрации напряжений (первая задача). Чтобы построить кривую 2 надо найти зависимость коэффициента интенсивности напряжений от геометрических размеров пластины, диаметра отверстия и длины радиальной трещины (вторая задача).

В общем случае решение упругопластической задачи об определении напряженного состояния в пластине конечной ширины с отверстием является весьма сложной. Поэтому для упрощения задачи принимается, что напряжения в пластине возрастают по упругому закону вплоть до предельного своего значения, определенного условием (2.1). Однако и для упругого решения рассматриваемой задачи имеются лишь графические зависимости [164], по которым невозможно точно определить напряжения на малом удалении от отверстия. Погрешность определения напряжений из-за большой кривизны графика возле концентратора может достигать до 15%.

В работе [65] на основе численного решения задачи о растяжении полосы с центральным отверстием и двумя радиальными трещинами с помощью метода конечных элементов построена аппроксимирующая формула для КИН. Относительная погрешность данной формулы для длинных трещин ( $d/R > 0.1$ ) не превышает 5%. Однако для коротких трещин ( $d/R < 0,1$ ), при которых и происходит, в основном, разрушение пластины, погрешность вычислений значительно возрастает. Графические зависимости КИН от длины трещины, приведенные в [201], также дают большую погрешность вычисления КИН для коротких трещин из-за большого наклона кривых. Относительная погрешность вычислений при этом достигает до 15...20%.

В связи с отмеченными недостатками, присущими указанным решениям, и необходимостью повышения их точности ниже предлагаются способы определения напряженного состояния в ослабленном сечении полосы с центральным отверстием и КИН в полосе с центральным отверстием и двумя радиальными трещинами.

## 2.2. Задача о концентрации напряжений в пластине с отверстием

Концентрация напряжений – один из основных факторов определяющих прочность и долговечность конструкций. Снижение концентрации напряжений позволяет создавать более надежные, более легкие и удобные в

эксплуатации, а также более экономичные конструкции. Поэтому создание машин и конструкций с наименьшей концентрацией напряжений является одной из важнейших задач.

Ниже предложен вариант решение задачи о концентрации напряжений в пластине с отверстием. На рис. 2.3 изображена пластинка, подверженная однородному растяжению в направлении оси  $x$ . Если в пластинке имеется малое круглое отверстие, то распределение напряжений вблизи этого отверстия изменится; однако в соответствии с принципом Сен-Венана можно сделать вывод, что этим изменением можно пренебречь на расстояниях, достаточно больших по сравнению с радиусом отверстия  $a$ .

Рассмотрим часть пластинки внутри концентрической окружности радиуса  $b$ , причем  $b \gg a$ . Напряжения на окружности радиуса  $b$  будут почти такие же, как и в пластинке без отверстия. Таким образом, вместо расчета пластинки задача сводится к расчету толстостенного кольца, внутренний радиус которого  $a$ , внешний –  $b$  (рис. 2.3).

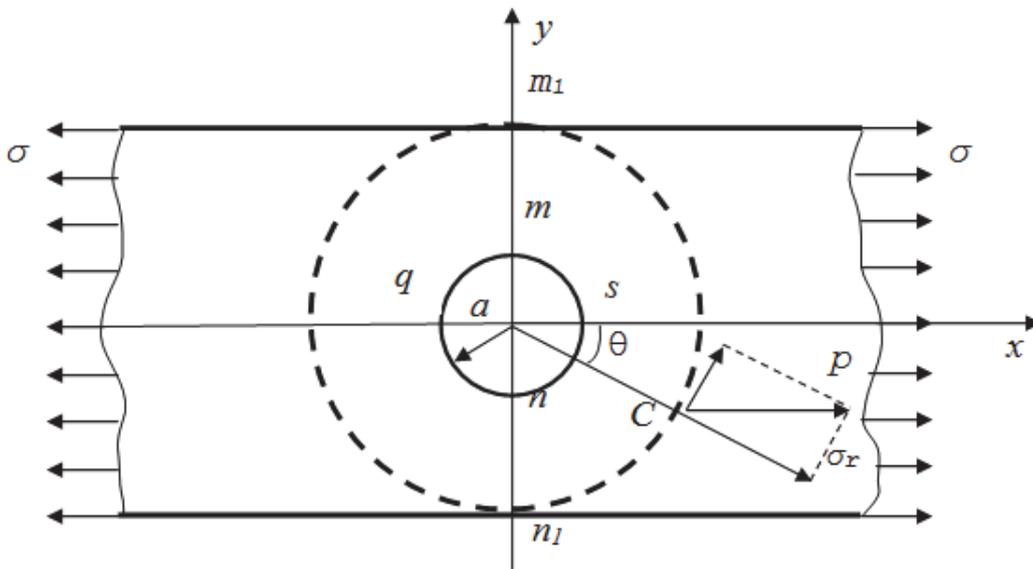


Рис. 2.3. Пластина с отверстием

Рассмотрим точку  $C$ , лежащую на внешней окружности кольца. Проведем площадку, проходящую через точку  $C$  и перпендикулярную радиусу. На этой наклонной площадке напряжение  $p = \sigma \cos \theta$ , в соответствии с известной формулой сопротивления материалов при осевом растяжении. Напряжение  $p$  разложим на нормальное напряжение  $\sigma_r$  и касательное напряжение  $\tau_{\theta r}$ . При  $r = b$  [102]

$$\sigma_r = p \cos \theta = \sigma \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\theta), \quad (2.3)$$

$$\tau_{\theta r} = -p \sin \theta = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta.$$

Эти усилия, действующие на внешнюю часть кольца, определяют распределение напряжений внутри кольца, которое можно рассматривать как состоящее из двух частей. Первая часть вызвана постоянной компонентой  $\sigma/2$  нормальных усилий, т.е.

$$\text{при } r = b \quad \sigma_r = \sigma/2, \tau_{\theta r} = 0. \quad (2.4)$$

Вторая часть вызвана усилиями

$$\text{при } r = b, \quad \sigma_r = \frac{1}{2} \sigma \cos 2\theta, \tau_{\theta r} = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta. \quad (2.5)$$

Вначале найдем напряжения в кольце, при граничных условиях (2.4). Это известная задача Ламе [102].

*Новый подход при решении задачи Ламе с использованием дифференциального уравнения равновесия тела в перемещениях.*

Под именем этой задачи подразумевается нахождение напряжений в средней части длинной толстостенной трубы, которая находится под действие равномерного внутреннего и/или внешнего давления.

Дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил записывается в виде [19]:

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\Delta$  – оператор Лапласа в трехмерном пространстве,  $\nabla$  – набла-оператор.

В работе [19], используя известное соотношение [204]

$$2\nabla\varphi = \Delta(\mathbf{R}\varphi) - \mathbf{R}\Delta\varphi,$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{i}_s x_s$  – радиус-вектор, уравнение равновесия (2.6) представлено в таком виде:

$$\Delta \left\{ \mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\nu)} \mathbf{R}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} = 0 \quad (2.7)$$

с учетом того, что в случае отсутствия массовых сил объемное расширение  $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u}$  является гармонической функцией. Уравнение (2.7) известно, как дифференциальное уравнение в форме Тедоне [204].

В работе [172], в отличие от работы [173], найден вектор перемещений  $\mathbf{u}$ , не определяя предварительно объемное расширение  $\theta$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \nabla\varphi, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{B}(x)$  – гармонический вектор ( $\Delta \mathbf{B} = 0$ ),  $\varphi$  – некоторая скалярная функция,  $x_3$  – ось декартовой системы координат.

Выражение (2.8) удовлетворяет дифференциальному уравнению равновесия (2.6), если функция  $\varphi$  подчиняется условиям:

$$\Delta \varphi = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu} \nabla \cdot \mathbf{B}.$$

В компонентах декартовой системы координат выражение (2.8) принимает вид [172]:

$$\begin{cases} u_1 = B_1 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \\ u_2 = B_2 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \\ u_3 = B_3 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Будем искать решение задачи Ламе с использованием декартовой системы координат по аналогии с работой [102], но на основании выражений (2.9).

Рассматриваемая задача принадлежит к разряду одномерных задач, ввиду того, что все перемещения в стенке трубы должны быть только функциями исключительно от радиуса трубы [168]. Также следует учесть то, что перемещения  $u_1$  и  $u_2$  не должны зависеть от  $x_3$ . Так как  $u_3$  в нашей задаче получается лишь в результате равномерного вытягивания трубы вдоль оси  $Ox_3$ , надо подобрать функцию  $\varphi$  и  $B_3$  так, чтобы было [102]

$$u_3 = ax_3 + b$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые константы.

Перейдем к системе декартовых координат с осями  $x, y$  извместо  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , а перемещения  $u_1$  и  $u_2$  будем записывать через  $u$  и  $v$ . Тогда выражения из (2.9) запишем в виде

$$\begin{cases} u = B_1 + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ v = B_2 + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2(1-2\nu)} z.$$

Далее, в результате решения задачи, будут получены выражения для определения напряжений в трубе, в которых они не будут зависеть от координаты  $z$ .

Автор работы [168] предлагает для решения осесимметричных задач искать в упрощенном виде функции, входящие в выражения для перемещений. Поэтому, упрощая выражения (2.10), перепишем их в виде

$$\begin{cases} u = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ v = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Учитывая, что распределение внешних сил симметрично оси трубы, вызванные ими деформации в ее стенках тоже симметричны относительно оси трубы. Поэтому упругие перемещения  $u$  и  $v$  будут зависеть только от расстояния  $r$  от оси трубы. Следовательно, нам необходимо добиться, чтобы перемещения имели такой вид [168]:

$$\begin{cases} u = \rho(r) \frac{x}{r}; \\ v = \rho(r) \frac{y}{r}. \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $\rho(r)$  – радиальное перемещение рассматриваемой точки трубы.

Сравнивая правые части выражений (2.11) и (2.12), запишем:

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \rho(r) \frac{x}{r}, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \rho(r) \frac{y}{r}. \quad (2.13)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{x}{r} \\ &\quad \text{и} \\ \frac{\partial}{\partial y}(\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{y}{r}, \\ &\quad \text{то} \\ \frac{\partial}{\partial x}[\varphi(r)] &= \frac{\partial[\varphi(r)]}{\partial r} \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial y}[\varphi(r)] &= \frac{\partial[\varphi(r)]}{\partial r} \frac{y}{r}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Используя выражения (2.14), можем записать

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{x}{r}, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{y}{r} \quad (2.15)$$

Сравнивая правые части равенств (2.13) и (2.15), имеем:

$$\rho(r) = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Таким образом, функция  $\varphi$ , входящая в выражения (2.12) через равенство (2.15), позволяет нам далее искать решение задачи о нахождении напряжений в средней части длинной толстостенной трубы.

В работе [102] на основе выражений (2.12) найдены радиальные и кольцевые напряжения в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2},\end{aligned}\quad (2.16)$$

где  $p_a$  – давление на внутренней поверхности трубы при  $r = a$ ;  $p_b$  – давление на внешней ее поверхности при  $r = b$ .

Напряжение в кольце (рис.4.4) можно определить по (2.16), если  $p_b = 0$ , а  $p_a = \sigma$ :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma a^2}{2(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma a^2}{2(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right),\end{aligned}\quad (2.17)$$

В формулах (2.17) учтено, что при  $r = a$   $\sigma_r = 0$  и  $\tau_{\theta r} = 0$ .

Так как в рассматриваемом случае  $b \gg a$ , то выражения (2.17) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \tau_{\theta r} = 0.\end{aligned}$$

Далее, с использованием функции напряжений  $\varphi = f(r) \cos 2\theta$  и уравнения неразрывности деформаций (2.20) из Приложения 2, можно найти напряжения в пластинке, подверженной однородному растяжению в направлении оси  $x$  (рис.2.1). В работе П.Ф. Папковича эти напряжения записаны в виде [102]:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta,$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left( 1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\theta r} &= -\frac{\sigma}{2} \left( 1 + 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Ранее эти формулы получил Кирш [135]. Наибольший интерес представляет вопрос о распределении напряжений  $\sigma_{\theta}$  в сечении  $mm_1$  или  $nn_1$ , т.е. при  $\theta = 3\pi/2$  и  $\theta = \pi/2$ . В этом случае вторая формула (2.18) принимает вид

$$\sigma_{\theta} = \sigma \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right).\tag{2.19}$$

При анализе формулы (2.19) видно, что влияние отверстия носит локальный характер. С увеличением  $r$  напряжение  $\sigma_{\theta}$  приближается к значению  $\sigma$ . Наибольшего значения напряжение  $\sigma_{\theta}$  достигает на контуре отверстия, т.е. при  $r = a$ . Полагая в формуле (4.10)  $r = a$ , находим, что в точках  $m$  и  $n$  (рис. 2.3)  $\sigma_{\theta max} = 3\sigma$ .

Следовательно, коэффициент концентрации напряжений

$$k_t = \frac{\sigma_{\theta max}}{\sigma} = 3.$$

В точках  $s$  и  $q$  (рис. 4.4), где  $\theta$  равно  $\pi$  и  $0$ , из второй формулы (2.18), находим

$$\sigma_{\theta} = -\sigma,$$

т.е. в окружном направлении в точках  $s$  и  $q$  действует сжимающее напряжение.

Формулы (2.18) выведены для весьма широкой пластинки, для которой  $b/a \gg 1$ . Однако, если  $b > 4a$ , то погрешность формул (2.18) не превышает 6%.

Если в бесконечной пластинке, находящейся под действием растягивающего напряжения  $\sigma$ , имеется эллиптическое отверстие, причем одна из главных осей эллипса (ось  $a$ ) параллельна направлению растяжения, то напряжения в точках на поверхности отверстия, расположенных на другой главной оси, равны

$$\sigma_x = \sigma \left( 1 + 2 \frac{a}{b} \right).\tag{2.20}$$

Здесь  $2a$  – ось эллипса, перпендикулярная направлению растяжения, а  $2b$  – другая ось. Формула (2.20) определяет напряжение  $\sigma_x$  в точках ослабленного сечения пластины.

Очень узкое отверстие с большим отношением  $a/b$ , перпендикулярное направлению растяжения, вызывает очень высокую концентрацию напряжений. Это объясняет причину распространения трещин, расположенных поперек направления приложенных сил.

### 2.3. Определение нормальных напряжений в ослабленном сечении пластины

Рассмотрим задачу о растяжении упругой однородной и изотропной полосы шириной  $2W$ , содержащей симметрично расположенное круговое отверстие с радиусом  $R$  (рис. 2.1). Боковая поверхность полосы и контур кругового отверстия свободны от внешних нагрузок. На достаточном удалении от отверстия ( $R/H < 0,2$ ) в поперечных сечениях полосы действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения  $\sigma_y = \sigma_0$ .

При  $W \rightarrow \infty$  рассматриваемая задача переходит в известную задачу Кирша [157], для которой, в частности, имеем (относящиеся к задаче Кирша величины, будем помечать значком  $\infty$ ):

$$\sigma_y^\infty(x, 0) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{R^4}{x^4} \right), \quad R \leq x \leq \infty. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) дает распределение нормальных напряжений вдоль оси  $Ox$ . Эти напряжения принимают максимальное значение в точке  $A$  с координатами  $x = R, y = 0$ , поэтому для коэффициента концентрации напряжений имеем  $K^\infty = 3$ .

Возвращаясь к исходной задаче для полосы, будем считать, что характер изменения напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  существенно не изменится при  $w \rightarrow \infty$ . Поэтому примем следующий закон изменения нормальных напряжений вдоль оси  $Ox$ :

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \alpha \cdot \frac{R^4}{x^4} \right), \quad R \leq x \leq \omega, \quad (2.22)$$

где  $\alpha$  – пока неопределенный безразмерный параметр.

Для определения  $\alpha$  мысленно рассечем полосу с отверстием вдоль оси  $Ox$ . При этом уравнения равновесия каждой из получаемых частей принимают вид:

$$\begin{aligned} \int_{-w}^w \sigma_0 dx &= \int_{-w}^{-R} \sigma_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \alpha \cdot \frac{R^4}{x^4} \right) dx + \\ &+ \int_R^w \sigma_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \alpha \cdot \frac{R^4}{x^4} \right) dx. \end{aligned}$$

Используя формулу (2.4) и выполняя интегрирование, находим

$$\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon^2}; \quad \varepsilon = \frac{R}{w}. \quad (2.23)$$

Таким образом, искомая приближенная формула для распределения нормальных напряжений вдоль оси  $Ox$  принимает вид

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{R^4}{x^4} \right), \quad R \leq x \leq \omega, \quad (2.24)$$

С помощью (2.24) получаем следующее выражение для коэффициента концентрации напряжений:

$$K = \frac{\sigma_y(R,0)}{\sigma_0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2+\varepsilon-\varepsilon^3}{1+\varepsilon+\varepsilon^3}. \quad (2.25)$$

По формуле (2.25) был вычислен ряд значений  $K$  и сопоставлен с точными данными, приведенными в работе [106]. При этом относительная погрешность вычисления  $K$  по формуле (2.25) для  $0 \leq \alpha \leq 0,5$  не превышает 6%. Указанная погрешность менее 2% при  $0 \leq \varepsilon \leq 0,05$  и стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### **2.4. Определения коэффициента интенсивности напряжений для полосы с двумя трещинами, выходящими на контур кругового отверстия**

Рассмотрим задачу для упругой однородной и изотропной полосы шириной  $2w$ , содержащей центральную внутреннюю трещину длиной  $2l$  (рис. 2.4). Нормальные напряжения  $\sigma_y(x, 0) = -\sigma(x)$  заданы на поверхностях трещины, причем функция  $\sigma(x)$  является четной, т.е.  $\sigma(x) = \sigma(-x)$ .

В работе [16] предложен метод решения указанной задачи и показано, что приближенная формула для определения КИН нормального отрыва имеет вид

$$K_1 = K_1^\infty + \frac{2l^{1/2}}{\pi(w^2-l^2)^{1/2}} \int_0^l \sigma(x) \operatorname{arccotg} \left( \frac{w^2-l^2}{l^2-x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad (2.26)$$

где

$$K_1^\infty = \frac{2l^{1/2}}{\pi} \int_0^l \frac{\sigma(x) dx}{(l^2-x^2)^{1/2}} \quad (2.27)$$

является величиной КИН для случая, когда  $w = \infty$ .

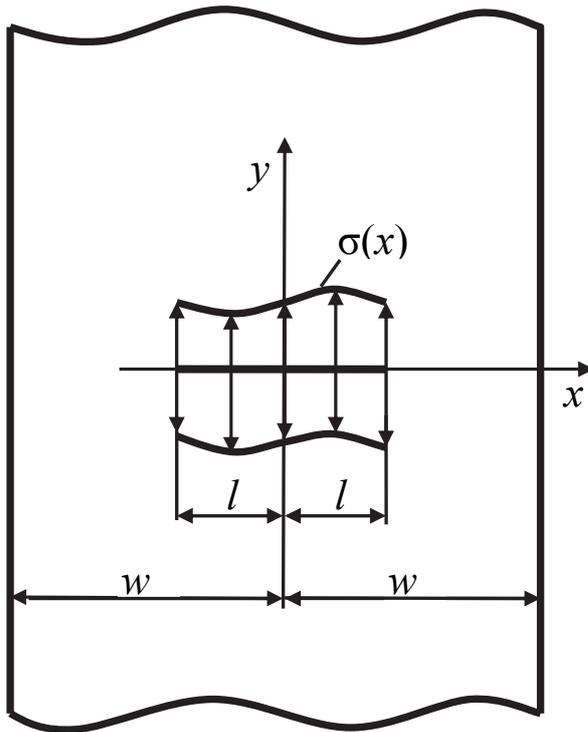


Рис. 2.4. Полоса с нагруженной центральной трещиной

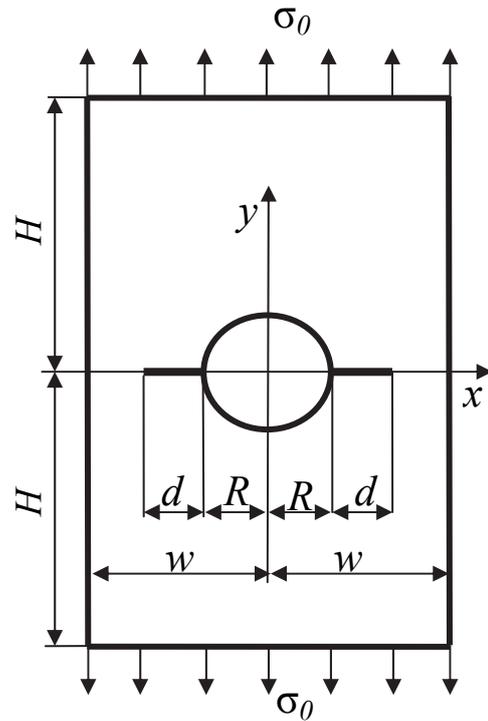


Рис. 2.5. Пластина с отверстием и радиальными трещинами

Заметим, что погрешность вычисления КИН по формуле (2.26), как правило» не превышает 5% при  $0 \leq l/w \leq 0,5$ .

Используя формулу (2.26) можно получить решение более сложной задачи о растяжении упругой однородной полосы шириной  $2w$ , которая содержит центральное круговое отверстие с радиусом  $R$ . На контур отверстия выходят две поперечные трещины длиной  $d$  каждая (рис. 2.5). Боковая поверхность полосы, контур отверстия и поверхности трещины свободны от внешних нагрузок. На достаточном удалении от отверстия в поперечных сечениях полосы действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения  $\sigma_y = \sigma_0$ .

Приближенное решение задачи будем строить следующим образом. Сначала рассмотрим задачу, решенную в р. 2.3 (рис. 2.1), и вычислим распределение нормальных напряжений  $\sigma_y(x,0)$  вдоль оси  $Ox$  при отсутствии трещин. Эти напряжения определяются формулой (2.24).

Будем считать, что «эквивалентная» внутренняя центральная трещина длиной  $2l$  ( $l = R + d$ ) нагружена на участках  $-l \leq x \leq -R$  и  $R \leq x \leq l$  внутренним давлением  $\sigma(x)$ , равным напряжению  $\sigma_y(x,0)$  из (2.24), т.е.

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq R \\ \sigma_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\varepsilon R^2}{1-\varepsilon^3 x^4} \right], & \text{при } R \leq x \leq R + d. \end{cases} \quad (2.28)$$

В силу симметрии задачи относительно оси  $\sigma_y$  достаточно ограничиться рассмотрением отрезка  $0 \leq x \leq w$ .

Подставляя (2.28) в (2.26) и (2.27), после некоторых вычислений получаем следующее представление КИН для «эквивалентной» трещины:

$$K_1^* = \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos(\omega) + \frac{w}{2} (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{2}{3} \alpha (1 + 2\omega^2) \right] + (1 - \theta^2)^{-1/2} \times \right. \\ \left. \int_{\varepsilon}^{\theta} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{x^2} + \alpha \cdot \frac{\varepsilon^4}{x^4} \right) \operatorname{arcctg} \left( \frac{1 - \theta^2}{\theta^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right\}, \quad (2.29)$$

где  $\theta = l/\omega$ ;  $\omega = R/w$ .

Очевидно, что  $\theta = \varepsilon/\omega$ , так что из трех параметров  $\varepsilon$ ,  $\theta$  и  $\omega$  независимыми являются лишь два.

Естественно предположить, что КИН  $K_I$  для задачи, показанной на рис. 2.5, может быть записан в виде

$$K_I = M \cdot K_1^*, \quad (2.30)$$

где  $K_1^*$  – КИН для трещины, определяемый формулой (2.29), а  $M$  – безразмерный поправочный множитель, который будет определен ниже.

Запишем соотношение (2.30) следующим образом:

$$K_I = \sigma_0 l^{1/2} F(\varepsilon, \omega), \quad (2.31)$$

где

$$F(\varepsilon, \omega) = M \frac{2}{\pi} \left\{ \arccos(\omega) + \frac{w}{2} (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{2}{3} \alpha (1 + 2\omega^2) \right] + (1 - \theta^2)^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times \int_{\varepsilon}^{\theta} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{x^2} + \alpha \cdot \frac{\varepsilon^4}{x^4} \right) \operatorname{arcctg} \left( \frac{1 - \theta^2}{\theta^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right\}, \quad (2.32)$$

Поправочный множитель  $M$  определим из следующих соображений. Устремим в формуле (2.31)  $\omega \rightarrow \infty$  (т.е. перейдем от полосы к плоскости) и определим поправочный множитель так, чтобы приближенные значения  $K_I$ , даваемые формулой (2.31) при  $\omega \rightarrow \infty$ , совпадали с известными точными результатами [106] для всех значений  $\omega$ . Опуская промежуточные выкладки, укажем, что поправочный множитель имеет вид

$$M(\rho) = \frac{1,25 + 5,27\rho}{1 + 5,33\rho}, \quad \rho = d/R.$$

Погрешность вычисления КИН по формуле (2.31) при  $\varepsilon = 0,25$  и  $0,26 \leq \theta \leq 0,5$  не превышает 5% по сравнению с результатами работы [140].

Полученные выше формулы (2.24) и (2.31) позволяют построить кривые 1 и 2 (см. р.2.1), необходимые для определения предельного состояния пластины с отверстием.

## 2.5. Расчет предельного состояния пластины с отверстием

В качестве примера рассмотрим пластину конечной ширины ( $2w = 140$  мм,  $H = 200$  мм,  $t = 1,83$  мм), ослабленную центральным круговым отверстием радиуса  $R = 14$  мм, и подвергающуюся равномерному растяжению (рис. 2.1). Материал пластины Д16АТ имеет следующие механические характеристики: истинное сопротивление отрыву  $S_k = 700$  МПа, предел прочности  $\sigma_B = 450$  МПа (характеристики металла определены в соответствии с [35]), вязкость разрушения  $K_c = 37$  МН/м<sup>3/2</sup>.

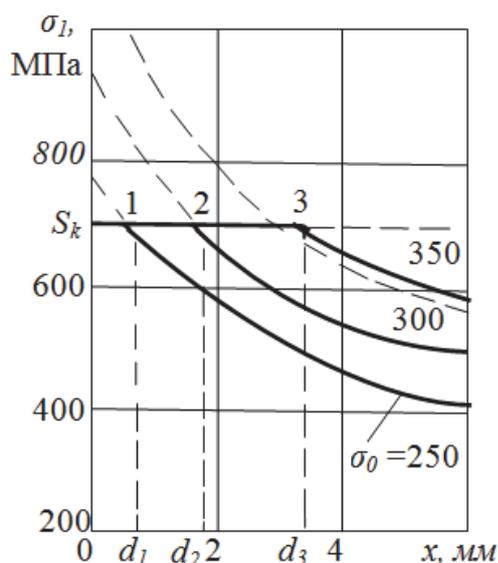


Рис. 2.6. Эпюры напряжений  $\sigma_l$  в ослабленном сечении пластины при различных напряжениях  $\sigma_0$

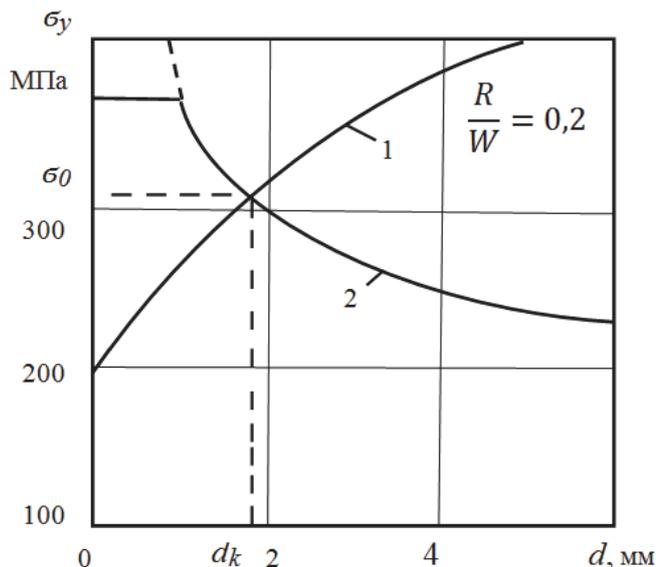


Рис.2.7. Графическое определение критического напряжения  $\sigma_0$

Вначале вычислим напряжение  $\sigma_l$  в ослабленном сечении пластины по формуле (2.24) для значений напряжения  $\sigma_0 = 250, 300, 350$  МПа, действующего на ее торцах. По данным расчета строим эпюры  $\sigma_l$  (рис. 2.6). При построении этих эпюр полагаем, что напряжения  $\sigma_l$  растут до  $S_k$  по упругому закону. Часть эпюры  $\sigma_l$ , расположенную выше уровня  $S_k$ , заменяем равномерно распределенной с ординатой  $S_k$ .

Длина горизонтального участка эпюры  $\sigma_l$  выбирается из условия равновесия отсеченной части пластины в сечении  $y = 0$ . В результате находим точ-

ки 1, 2 и 3 (рис. 2.6). Опуская затем перпендикуляры из точек 1,2 и 3 на ось абсцисс, находим размеры зон предельного состояния материала  $d = 2,0; 4,5; 8,0$  мм для соответствующих значений напряжений  $\sigma_0 = 250, 300$  и  $350$  МПа. Это позволяет построить зависимость  $\sigma_0$  от  $d$  (кривая 1 на рис. 2.7).

Используя критерий прочности (2.2) и формулу (2.31) запишем условие разрушения пластины в виде

$$K_I = K_c = \sigma_0 l^{1/2} F(\varepsilon, \omega).$$

В данном выражении  $\sigma_0$  является критическим напряжением для пластины, поэтому получаем

$$\sigma_k = \frac{K_c}{l^{1/2} F(\varepsilon, \omega)}. \quad (2.33)$$

По этой формуле можно построить кривую 2 (рис. 2.7). Фигурирующий в выражении (2.31) интеграл вычислялся с помощью квадратурной формулы Гаусса с 32 узлами. По двум кривым 1 и 2 (рис. 2.7), построенным для рассматриваемой конкретной пластины, найдены критический размер зоны предельного состояния материала возле отверстия  $d_k = 1,8$  мм и напряжение  $\sigma_0 = 304$  МПа, при котором произойдет разрушение пластины.

Использование критерия прочности  $\sigma_{экр} \geq \sigma_B$  для определения предельного состояния данной пластины аналогично применению критерия  $\sigma_I \geq S_k$ .

## 2.6. Экспериментальная проверка способа определения предельного состояния пластины с отверстием

С целью проверки предложенного способа определения предельного состояния пластины с отверстием были проведены испытания на разрушение посредством растяжения образцов с геометрическими размерами и механическими характеристиками, указанными в разделе 2.4. Было испытано 35 образцов при 7 различных значениях диаметров отверстий  $D$  (с одинаковыми диаметрами отверстий было изготовлено по 5 пластин).

Процесс разрушения элементов является случайным и характеризуется множеством всех выборочных функций  $D_k^*$ , полученных при регистрации данного случайного явления.

Для фиксированного значения  $D_k^*$  величины  $\sigma_0^{(1)}(D_k^*)$ ,  $\sigma_0^{(2)}(D_k^*)$ ,  $\sigma_0^{(3)}(D_k^*)$ ,  $\sigma_0^{(k)}(D_k^*)$  представляют собой различные допустимые значения случайной величины  $\sigma_0(D_k^*)$ .

Случайная величина  $\sigma_0(D_k^*)$  является непрерывной. Чтобы полностью охарактеризовать случайную величину, необходимо знать закон распределения этой величины.

При небольших объемах выборки  $m$  ( $m < 20$ ) можно пользоваться критериями нормального распределения, так как отклонения различных распределений друг от друга практически незаметны при малых  $m$  [113]. Поэтому полагаем, что случайная величина  $\sigma_0(D_k^*)$  имеет нормальное распределение. Проверка этой гипотезы осуществляется с помощью критерия согласия, основанного на использовании эмпирического распределения и теории Колмогорова.

Выражение для нормального распределения имеет вид

$$F(\sigma_0) = \frac{1}{2} + \Phi \left[ \frac{\sigma_0 - \bar{\sigma}_0}{S} \right],$$

где

$$\Phi(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma_0} t^{-1/2} dt,$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_0^{(i)}.$$

$$S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\sigma_0^{(i)} - \bar{\sigma}_0)^2.$$

Здесь  $\bar{\sigma}_0$  – выборочное среднее;  $S^2$  – выборочная дисперсия.

Для оценки генерального среднего  $\alpha$  используется выборочное среднее  $\bar{\sigma}_0$  и выборочная дисперсия  $S^2$ . Оценка для  $\alpha$  в этих условиях имеет вид

$$\bar{\sigma}_0 - \frac{1}{\sqrt{m}} t_{1-p/2} \leq \alpha \leq \bar{\sigma}_0 + \frac{1}{\sqrt{m}} t_{1-p/2}$$

Здесь  $t_p$  – квантили  $t$ -распределения (распределения Стьюдента). Значения  $t_{1-p/2}$  приведены в работе [113].

Для оценки генеральной дисперсии  $\sigma^2$  используется выборочная дисперсия  $S^2$ . Двусторонняя доверительная оценка для  $\sigma^2$  имеет вид

$$\frac{fS^2}{\chi_{1-p/2}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{fS^2}{\chi_{p/2}^2},$$

где  $\frac{fS^2}{\chi_{1-p/2}^2}$  и  $\frac{fS^2}{\chi_{p/2}^2}$  – квантили  $\chi^2$ -распределения (распределения Пирсона) [113].

Плотность  $\chi^2$ -распределения зависит только от числа степеней свободы  $f$ .

По доверительным интервалам для  $\alpha$  и  $\sigma^2$  строится доверительная область для теоретической линии распределения соответствующей генеральной совокупности.

Важным условием правильного применения статистических оценок является отсутствие грубых ошибок при наблюдениях. Необходимо убедиться в том, что все элементы выборки совместимы с гипотезой о том, что все они извлечены из одной и той же генеральной совокупности. Сомнительными, как правило, бывают самый большой и самый малый элементы выборки. Пусть  $\bar{\sigma}_0$  – крайний элемент выборки. Величина

$$\tau = \frac{\sigma_0 - \bar{\sigma}_0}{S}$$

называется максимальным относительным отклонением, которое имеет специальное распределение ( $\tau$ -распределение). Значение  $\sigma_0$  отбрасываются как грубо ошибочные, если

$$\frac{\sigma_0 - \bar{\sigma}_0}{S} \leq \tau_{1-p}.$$

Квантили  $\tau_{1-p}$  приведены в работе [113].

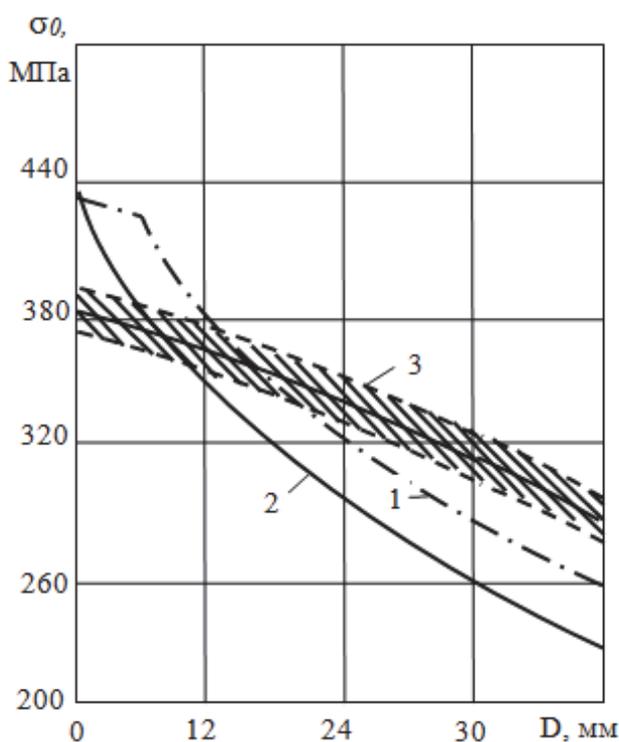


Рис. 2.8. Зависимость критического напряжения  $\sigma_0$  от диаметра отверстия в пластине

На рис. 2.8 построены графики зависимости напряжения  $\sigma_0$ , (при котором происходит разрушение пластины) от диаметра отверстия на основании расчетов по предложенному способу с использованием критерия  $\sigma_1 \geq S_k$  (кривая 1), критерия  $\sigma_{\text{экр}} \geq \sigma_B$  (кривая 2), а также результатов испытания (кривая 3). Заштрихованная часть рис. 2.8 – доверительная область экспериментальных данных для  $\sigma^2$  при  $1 - p = 0,95$ .

Наибольшее расхождение экспериментальных и теоретических данных, полученных на основании использования критерия  $\sigma_1 \geq S_k$  не превышает 7%, а полученных на основании применения критерия  $\sigma_{\text{экр}} \geq \sigma_B$  – не более 9%.

Как видно из рассмотренного выше примера, погрешность предлагаемого теоретического способа сравнительно невелика и вполне допустима для инженерных расчетов.

### 3. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ПОВРЕЖДЕНИЕМ

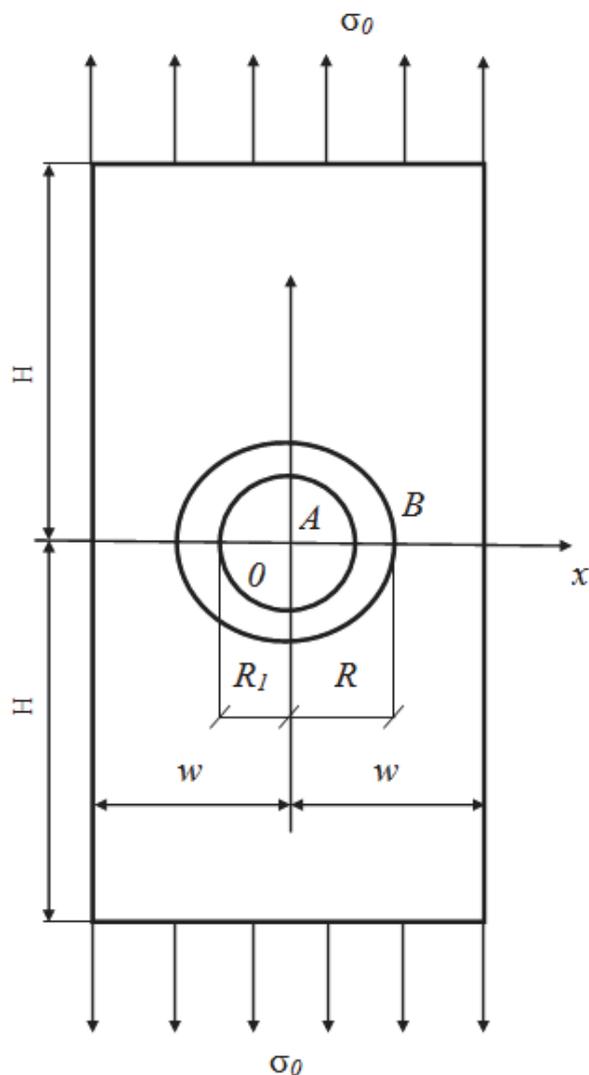


Рис. 3.1. Пластина с отверстием, подкрепленным кольцом

В разделе 2.1 предложен новый способ расчета предельного состояния ослабленных отверстием пластин. Указанный подход базируется на совместном использовании критериев прочности механики разрушения и механики сплошных сред и разработан применительно к ослабленным круговым вырезом пластинам, материал которых является однородным и изотропным.

Однако в практике эксплуатации летательных аппаратов и некоторых других конструкций встречаются дефекты в виде пробойин [53], материал возле которых изменяет свои механические характеристики и структуру вследствие удара. Основными факторами, влияющими на изменение свойств материала в зоне повреждения, являются скорость и масса ударника. В свою очередь геометрические размеры и механические характеристики дефектной зоны оказывают влияние на остаточную прочность поврежденного элемента и всей конструкции в целом.

Ниже предлагается способ определения предельного состояния пластины, содержащей отверстие от пробойника. При этом учитываются параметры повреждения. Расчеты основаны на совместном использовании критериев прочности механики разрушения и механики сплошных сред.

#### 3.1. Постановка задачи

Рассмотрим пластину конечной ширины, ослабленную пробоем в виде кругового отверстия радиусом  $R_1$  (рис. 3.1). Контур отверстия и боковые грани пластины свободны от внешней нагрузки. На достаточном удалении

( $H/R_I < 0,2$ ) от дефектной зоны толщиной  $\delta = R - R_I$  действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения  $\sigma_0$ .

Расчет критического состояния пластины с пробоем согласно предложенному выше способу должен включать в себя, с одной стороны, определение протяженности зоны предельного состояния материала возле концентратора при различной нагрузке с помощью критерия прочности сплошного материала, а с другой стороны – установление критического размера этой зоны посредством применения критерия механики разрушения.

Для определения протяженности зоны предельного состояния материала необходимо знать напряженное состояние в ослабленном сечении пластины. А для того, чтобы установить критический размер этой зоны надо знать выражение для коэффициента интенсивности напряжений  $K_I$  в пластине с радиальными трещинами, выходящими на контур пробоя в опасном сечении, и его критическое значение  $K_c$ .

Ниже предлагаются приближенные решения указанных задач.

### 3.2. Определение напряженного состояния пластины с повреждением

Для решения поставленной задачи мысленно заменим поврежденную зону возле пробоя упругим кольцом, толщина которого равна толщине дефектной зоны  $\delta$ . Коэффициент Пуассона  $\nu_I$  и модуль сдвига  $G_I$  материала по толщине кольца постоянны. Полагаем, что кольцо вставлено (впаяно) в отверстие без натяга, контакт его с пластиной идеальный. Коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала пластины обозначим соответственно через  $\nu$  и  $G$ .

При  $w$  и  $H$ , стремящихся к бесконечности, рассматриваемая задача переходит в известную задачу [124], согласно которой нормальные напряжения, действующие в ослабленном сечении пластины (ось  $Ox$ ), записываются в следующем виде:

для кольца ( $R_I \leq x \leq R$ )

$$\sigma_y^{(1)\infty}(x, 0) = \frac{\sigma_0}{2} \left[ a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_{-1}}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} - 6a_3 \frac{x^2}{R^2} - \frac{3}{2} b_{-3} \frac{R^4}{x^4} \right], \quad (3.1)$$

для пластины ( $R \leq x \leq \infty$ )

$$\sigma_y^\infty(x, 0) = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 2 + \frac{1}{2} \beta_{-1} \frac{R^2}{x^2} - \frac{3}{2} \beta_{-3} \frac{R^4}{x^4} \right], \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= n^2(1 - \nu)/N; \quad a_{-3} = -2(1 + \nu)n^4(n^2 - 1)C/D_I; \\ b_1 &= 2(1 + \nu)[C(4 - 3n^2) + n^6(1 + \nu)C_I]n^2/D_I; \\ b_{-1} &= 2(1 + \nu)/N; \quad b_{-3} = -2(1 + \nu)[C + n^4(1 + \nu)C_I]/D_I; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{-1} &= 2 - 2(n^2 - 1)(1 + \chi)/N; \\
\beta_{-3} &= -2 + 2(1 + \chi)[C(4n^6 - 7n^4 + 4n^2 - 1) + \\
&\quad + n^4(n^4 - 1)(1 + \chi C_1)]; \\
D_1 &= (\chi + C_1)n^2[C(3n^4 - 6n^2 + 4) + n^6(1 + \chi C_1)] + \\
&\quad + (\chi C_1 + \chi_1)[C + n^6(1 + \chi C_1)]; \\
N &= 2C - n^2[C - (1 + \chi C_1)]; \\
C &= C_1 - 1; \quad C_1 = G/G_1; \quad n = R/R_1;
\end{aligned}$$

$\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  и  $\chi_1 = (3 - \nu_1)/(1 + \nu_1)$  при обобщенном плоском напряженном состоянии.

Будем считать, что в полосе ( $w < \infty$ ) характер изменения напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  существенно не изменится по сравнению с бесконечной пластиной. При этом следует принять во внимание, что наибольшее влияние на напряжение  $\sigma_y^{(1)\infty}(x, 0)$  при  $x \rightarrow R_1$  оказывает коэффициент  $b_{-3}$ , стоящий при  $R^4/x^4$  в формуле (3.1). Это обусловлено более значительным приростом при  $x \rightarrow R_1$  величины  $R/x$  в четвертой степени по сравнению с  $R/x$  во второй степени, которые имеют другие члены выражения, и разница будет тем больше, чем больше отношение  $R/R_1$ . На основании сказанного заменим в выражении (3.1) коэффициент  $b_{-3}$  на неизвестный  $\alpha$  при записи нормального напряжения в кольце при переходе от бесконечной пластины к полосе.

Далее, учитывая, что коэффициент  $\beta_{-3}$ , стоящий при  $R^4/x^4$  в формуле (3.2), можно записать в виде  $\beta_{-3} = b_{-3} + \gamma$ , произведем при расчете полосы замену здесь  $b_{-3}$  на  $\alpha$ .

На основании вышеизложенного примем следующие выражения для нормальных напряжений, действующих вдоль оси  $Ox$  при  $w < \infty$ :

в кольце ( $R_1 \leq x \leq R$ )

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{\sigma_0}{2} \left[ a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_{-1}}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} - 6a_3 \frac{x^2}{R^2} - \alpha \frac{R^4}{x^4} \right], \quad (3.3)$$

в полосе ( $R \leq x \leq w$ )

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 2 + \frac{1}{2} \beta_{-1} \frac{R^2}{x^2} - \left[ \frac{3}{2} \gamma + \alpha \right] \frac{R^4}{x^4} \right], \quad (3.4)$$

где  $\alpha$  – пока неопределенный безразмерный параметр.

Для определения  $\alpha$  мысленно рассечем полосу вдоль оси  $Ox$ . При этом уравнение равновесия каждой из получаемых частей принимает вид:

$$\begin{aligned}
\int_{-w}^w \sigma_0 dx &= \int_{-w}^{-R} \sigma_y(x, 0) dx + \int_{-R}^{-R_1} \sigma_y^{(1)}(x, 0) dx + \\
&\quad + \int_{R_1}^R \sigma_y^{(1)}(x, 0) dx + \int_R^w \sigma_y(x, 0) dx.
\end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение выражения для напряжений  $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$  и  $\sigma_y(x, 0)$  из (3.19) и (3.20) и выполняя интегрирование, находим:

$$\alpha = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2a_4 - \beta_{-1}\varepsilon + \gamma\varepsilon^3}{\varepsilon^3 - n^4}, \quad \varepsilon = R/w, \quad (3.5)$$

где

$$a_4 = -2 + a_1 - 2a_3 - \gamma/2 + (b_1 - b_{-1} + \beta_{-1})/2 - (a_1 + b_1/2)/n + b_{-1}n/2 + 2a_3/n^3.$$

Таким образом, искомые формулы для нормальных напряжений, действующих в кольце и пластине вдоль оси  $Ox$ , записываются в виде выражений (3.3) и (3.4), в которых параметр  $\alpha$  находится из (3.5).

В кольце коэффициент концентрации напряжений

$$K^{(1)} = \sigma_y^{(1)}(R_1, 0)/\sigma_0. \quad (3.6)$$

В частности, если материал кольца и пластины одинаков, то при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $K^{(1)} \rightarrow 3$ , что согласуется с результатом Кирша[157].

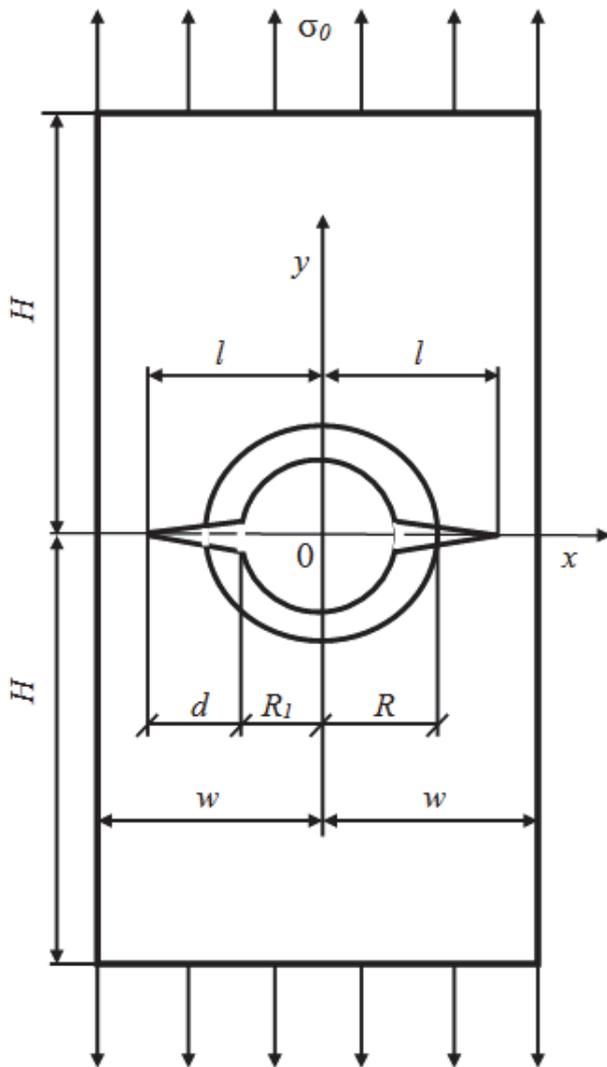


Рис. 3.2. Пластина с подкрепленным отверстием и двумя радиальными трещинами

### 3.3. Определение коэффициента интенсивности напряжений в полосе с двумя радиальными трещинами, выходящими на контур подкрепленного кольцом отверстия

Рассмотрим задачу о растяжении упругой однородной и изотропной полосы (рис. 3.2) шириной  $2w$  ( $H \rightarrow \infty$ ), которая содержит центральное круговое отверстие с радиусом  $R$ . В отверстие впаяно кольцо с внутренним радиусом  $R_1$ . На внутренний контур кольца выходят две поперечные трещины длиной  $d$  каждая. Боковая поверхность полосы, внутренний контур отверстия и поверхности трещины свободны от внешних нагрузок. На достаточном удалении от отверстия в поперечных сечениях полосы действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения  $\sigma_0$ .

Для приближенного решения задачи используем рис.2.3 и подход, описанный в разделе 2.1.

Далее, считаем, что эквивалентная внутренняя центральная трещина длиной  $2l$  ( $l = R_l + d$ ) нагружена на участках

$$\begin{aligned} -l \leq x \leq -R \\ \text{и} R \leq x \leq l \end{aligned}$$

внутренним давлением  $\sigma(x)$ , равным напряжению  $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$ , полученному по формуле (3.3), когда трещина не выходит из кольца в пластину, т.е.

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq R_1 \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0), & \text{при } R_1 \leq x \leq R. \end{cases} \quad (3.7)$$

или равным  $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$  на отрезке  $[R_l, R]$  и  $\sigma_y(x, 0)$  на отрезке  $[R, l]$  согласно формулам (3.19) и (3.20) в том случае, когда трещина проходит сквозь кольцо и проникает в пластину, а именно:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq x \leq R_1 \\ \sigma_y^{(1)}(x, 0), & \text{при } R_1 \leq x \leq R \\ \sigma_y(x, 0) & \text{при } R_1 \leq x \leq R \end{cases} \quad (3.8)$$

Подставляя соотношения (3.7) и (3.8) в (2.24), после некоторых преобразований получаем следующее представление КИН для эквивалентной трещины, расположенной в кольце и выходящей на внутренний его контур:

$$K_1^{(1)} = \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F^{(1)}(\varepsilon_1, \omega_1), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\varepsilon_1, \omega_1) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ a_1 + \frac{b_1}{2} - \frac{3a_3}{\omega_1^2} \right] \arccos \omega_1 + \right. \\ & + (1 + \omega_1^2)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{b_{-1}\omega_1}{2} - \frac{3a_3}{\omega_1} - \frac{\alpha\omega_1}{3} (1 + \omega_1^2) \right] + \\ & + (1 - \theta^2)^{-1/2} \int_{\varepsilon}^{\theta} \left[ \left( a_1 + \frac{b_1}{2} \right) + \frac{b_{-1}}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{x^2} - 6a_3 \cdot \frac{x^2}{\varepsilon^2} - \right. \\ & \left. \left. - \alpha \frac{\varepsilon^2}{x^2} \right] \operatorname{arcctg} \left( \frac{1 - \theta^2}{\theta^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right\} \end{aligned}$$

и для эквивалентной трещины, проходящей сквозь кольцо с поверхности отверстия и выходящей в пластине

$$K_1 = \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F(\varepsilon, \omega), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon, \omega) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ a_1 + \frac{b_{-1}}{2} - \frac{3a_3}{\omega^2} \right] \arcsin \omega \left[ \omega_1 (1 - \omega_1^2)^{\frac{1}{2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \omega (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} \right] + 2 \arccos \omega + (1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} \omega \times \right. \\
& \times \left[ \frac{3a_2}{\omega^2} - \frac{b_{-1}}{2} + \frac{\beta_{-1}}{2} - \frac{(1 + 2\omega^2)(\alpha - 1,5\gamma)}{6} \right] + \\
& + (1 - \omega_1^2)^{\frac{1}{2}} \omega \left[ \frac{b_{-1}}{2} - \frac{\alpha n^2 (1 + 2\omega_1^2)}{3} - \frac{3a_3}{\omega^2 n^2} \right] + \\
& + (1 - \theta^2)^{-1/2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \left[ a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_{-1}}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{x^2} - \right. \\
& \left. - 6a_3 \cdot \frac{x^2}{\varepsilon^2} - \alpha \frac{\varepsilon^4}{x^4} \right] \operatorname{arcctg} \left( \frac{1 - \theta^2}{\theta^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx + \\
& + (1 - \theta^2)^{-1/2} \int_{\varepsilon}^{\theta} \left[ 2 + \frac{\beta_{-1} \varepsilon^2}{2 x^2} \right] - \\
& \left. - \left[ \frac{3}{2} \gamma + \alpha \right] \frac{\varepsilon^4}{x^4} \right] \operatorname{arcctg} \left( \frac{1 - \theta^2}{\theta^2 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right\},
\end{aligned}$$

В формулы (3.9) и (3.10) необходимо ввести поправочные коэффициенты  $M^{(1)}$  и  $M$  соответственно. Это вызвано тем, что круговое отверстие следует считать не только как концентратор, вызывающий перераспределение напряжений в пластине, но и как свободную поверхность, на которую выходят трещины.

Для определения  $M^{(1)}$  и  $M$  рассмотрим частный случай задачи, показанной на рис. 3.2, устремив  $w$  к бесконечности (т.е. перейдем от полосы к плоскости). Затем при  $R_I = R$ , сравнивая приближенное решение этой задачи, получаемое с использованием вышеуказанного подхода, с известным точным решением [124], приходим к следующим выражениям для искомых поправочных коэффициентов:

$$M^{(1)} = M = (1,25 + 5,27\rho_I) / (1 + 5,33\rho_I), \quad \rho_I = d/R_I.$$

Таким образом, приближенное решение исходной задачи, показанной на рис. 3.2, имеет вид:

для трещины в кольце

$$\kappa_1^{(1)} = M^{(1)} \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F^{(1)}(\varepsilon_1, \omega_1), \quad (3.11)$$

для трещины, выходящей в пластине

$$\kappa_1 = M \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F(\varepsilon, \omega), \quad (3.12)$$

Чтобы воспользоваться формулами (3.3), (3.4), (3.11) и (3.12) при расчете критического состояния пластины, необходимо иметь кроме упругих характеристик материала пластины ( $\nu$  и  $G$ ) также упругие характеристики материала кольца, которое служит моделью поврежденной зоны. Существующие способы определения упругих характеристик материала неприемлемы для исследования повреждений, возникших от удара. В связи с этим разработан способ определения коэффициента Пуассона и модуля Юнга в поврежденной зоне пробитой пластины.

### **3.4. Определение упругих характеристик материала в поврежденной зоне конструктивного элемента**

Как показывают исследования, вследствие удара материал в зоне повреждения пробитых пластин меняет свои механические характеристики и структуру. Изменение свойств материала ведет к снижению остаточной прочности и долговечности поврежденного элемента и всей конструкции в целом.

В практике используют ряд методов исследования механических характеристик материалов с применением микрообразцов. При этом используются микрообразцы в виде тонких пластин [73] или круглые – с диаметром рабочей части 0,8...2,00 мм [36,108]. Широко известны также методики построения диаграмм твердости путем внедрения индентора в поверхность образца при упругих и пластических деформациях [22, 23, 49, 70, 84, 91–93]. Для отдельных материалов установлены корреляционные связи между твердостью и некоторыми механическими характеристиками. Однако применение указанных методов для исследования малых областей поврежденных элементов конструкций, в которых сплошность материала нарушена, зачастую связано с значительными техническими трудностями. Так, например, глубина распространения микротрещин в металле от границы дефекта может быть менее 0,8 мм. Изготовить образцы из таких малых объемов материала для испытаний по способам [49,83,142] не представляется возможным. Кроме того в процессе механической обработки образца даже незначительные нагрузки могут стать причиной развития микротрещин, что приведет к еще большему изменению структуры материала. По способам [49,70,93] определяются характеристики материала лишь в поверхностном слое, однако структура поврежденной зоны может значительно изменяться по глубине материала.

Ниже рассмотрен вопрос об исследовании упругих механических характеристик (коэффициента Пуассона  $\nu$  и модуля Юнга  $E$ ) в поврежденной зоне пробитых пластин.

Сущность способа заключается в том, что для определения упругих характеристик материала по глубине повреждения зоны изготавливается плоский образец, на котором рисунок сквозных макротрещин в масштабе

повторяет рисунок микротрещин, полученный микрофотографированием шлифа среза дефектной зоны. Затем образец испытывается на растяжение и на различных его участках экспериментально (например, методом тензометрирования) измеряются продольные  $\varepsilon_1$  и поперечные  $\varepsilon_2$  деформации. Значения коэффициента Пуассона и модуля Юнга для каждого участка пластины находятся по известным формулам:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right|, \quad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_1}.$$

где  $\sigma_0$  – равномерное растягивающее напряжение, приложенное к торцам образца. Для испытания следует подбирать образец из того же материала, который применялся для изготовления исследуемого элемента конструкции, с целью максимального приближения к условиям работы материала в поврежденной зоне.

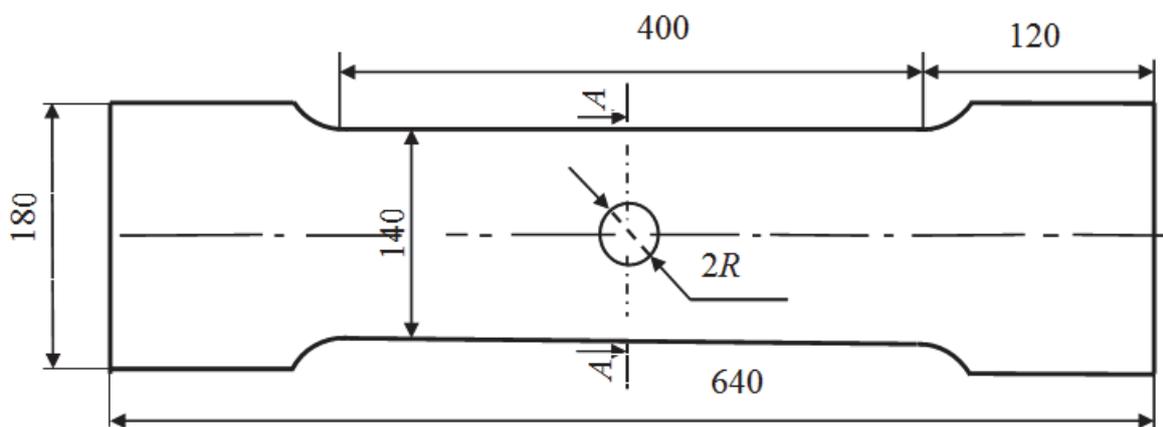


Рис. 3.3. Схема вырезки темплета для микрообразцов из пробитой пластины

Испытания проводили на пробитых пластинах размерами 400x140x1,83 мм (рис. 3.3) с центральным отверстием радиуса  $R=3,6$  мм. Повреждения на пластинах, изготовленных из сплава АМГ-6М, наносились ударниками, имеющими массу  $m = 0,8$  г и скорость удара  $V = 1,0$  км/с.

Предварительно для анализа и моделирования поврежденной зоны были вырезаны темплеты из пробитых образцов. Шлифы изготавливали по сечению А-А.

На рис. 3.4 показан скопированный срез поврежденной и прилегающей к ней зоны. На анализируемой микрофотографии шлифа среза дефектной зоны ясно просматриваются трещины, расположенные как внутри, так и выходящие наружу поврежденного материала. Глубина дефектной зоны колеблется в пределах 0,8...0,9 мм. Затем на пластину размерами 400x140x1,83 мм, предназначенную для модели-

рования структуры поврежденной зоны, были нанесены контуры трещин согласно микрофотографии шлифа среза дефектной зоны в масштабе 140:1 (рис.3.5). Материал пластины – сплав АМГ-6М. После пропилки сквозных трещин образец был разбит на 8 равных участков размерами 50x70 мм, на каждый из которых были наклеены по одной розетке тензорезисторов типа КФ5–П1 с базой 50 мм. Схема наклейки тензорезисторов показана на рис. 3.5 пунктирными линиями с обозначением номера розетки. Нагружение образца производилось в машине Р-5. К торцам пластины прикладывалось равномерное растягивающее напряжение  $\sigma_0 = 39$  МПа. Деформация тензорезисторов регистрировалась прибором ИДЦ-1. По данным испытания и с помощью формул для  $E$  и  $\nu$  определены характеристики материала всех участков образца. Величины характеристик занесены в таблицу 3.1.

Значения характеристик материала в таблице записаны в виде дроби, где в числителе дана величина  $E$ , а в знаменателе величина  $\nu$  для каждого участка.



Рис. 3.4. Срез поврежденной зоны

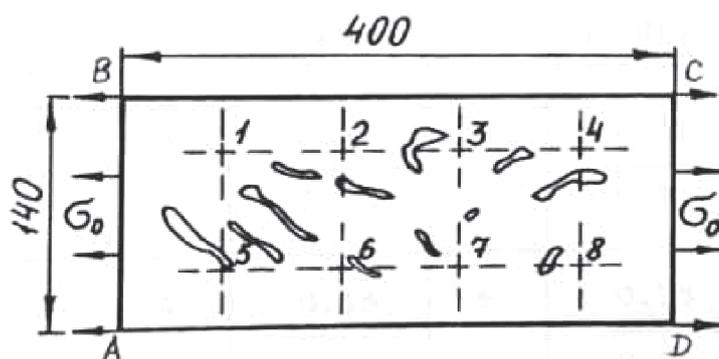


Рис. 3.5. Срез поврежденной зоны

Таблица 3.1

Значения модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$  для различных участков зоны поврежденного материала

Номер участка	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{-6}$ МПа	Номер участка	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{-6}$ МПа	Номер участка	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{-6}$ МПа	Номер участка	Модуль Юнга, $E \cdot 10^{-6}$ МПа
	Коэффициент Пуассона. $\nu$						
1	0,53/0,32	3	0,41/0,25	5	0,51/0,31	7	0,48/0,29
2	0,36/0,22	4	0,48/0,29	6	0,35/0,21	8	0,35/0,21

В связи с тем, что найденные характеристики поврежденной зоны невозможно проверить прямым экспериментальным методом, была предложена их косвенная оценка. С этой целью, с учетом найденных характеристик материала поврежденной зоны, теоретически определено напряженное состояние в опасном сечении пробитой пластины и сопоставлено с экспериментальными данными.

Нормальное напряжение  $\sigma_y$  в опасном сечении полосы с подкрепленным центральным отверстием определялись по [124]. Рассмотрен случай нагружения пластины равномерным растягивающим напряжением  $\sigma_0$ , приложенным на достаточном удалении от концентратора. Дефектная зона при расчете заменялась упругим кольцом, впаянным в пластину. Упругие характеристики материала принимались неизменными по толщине кольца. Значения  $E$  и  $\nu$ , взятые из табл. 3.1, осреднены ( $E = 0,43 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0,26$ ). Результаты расчета представлены на рис. 3.6 в виде кривой 1 зависимости  $\sigma_y(x)/\sigma_0$  от расстояния до контура отверстия.

На рис. 3.6 также нанесена экспериментальная кривая 2 полученная на основании применения метода тензометрирования. На пластину с повреждением (рис. 3.5) в ослабленном сечении были наклеены тензорезисторы типа КФ5-П1 с базой 1 мм. Нагружение пластины осуществлялось по торцам  $AB$  и  $CD$  равномерным растягивающим напряжением  $\sigma_0 = 78$  МПа на разрывной машине Р-5. Деформация тензорезисторов регистрировалась прибором ИДЦ-1.

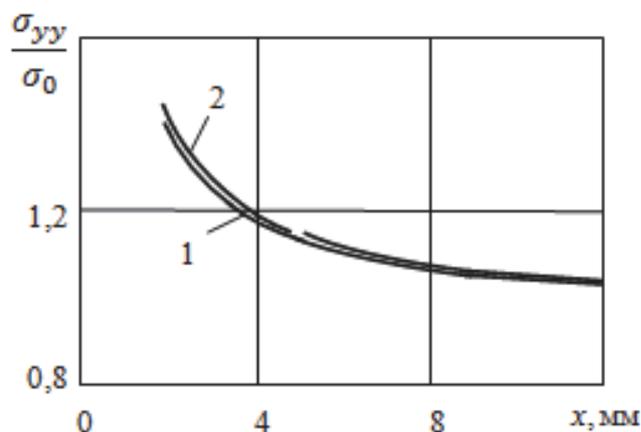


Рис. 3.6. Зависимость отношения  $\sigma_y(x)/\sigma_0$  в ослабленном сечении пластины от расстояния  $x$   
 1 – теоретическая кривая;  
 2 – экспериментальная кривая.

Ввиду того, что поврежденный материал в зоне пробоя выступает над поверхностью пластины в форме кратера, наклейка тензорезисторов у кромки отверстия затруднена. Поэтому технически невозможно было провести измерение напряжений в зоне 1,5 мм от края концентратора.

Проведенные испытания и расчеты указывают на хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных. Наибольшее расхождение значений  $\sigma_y(x)/\sigma_0$ , полученных расчетом по [124] и взятых из эксперимента, не превышает 4%.

Следовательно, предложенный способ позволяет с достаточной точностью для инженерных расчетов определять упругие характеристики материала и может быть использован для определения напряженного состояния пробитых элементов конструкций.

### 3.5. Определение предельного состояния пластины с повреждением (теория и эксперимент)

В процессе возрастания нагрузки возле пробоя в ослабленном сечении пластины возникают зоны предельного состояния материала. В этих зонах наблюдается нарушение сплошности материала, что эквивалентно образованию трещин. При дальнейшем увеличении нагрузки зоны предельного состояния (трещины) увеличиваются до тех пор, пока трещины не достигнут критической длины. Затем произойдет катастрофическое развитие трещин и разрушение пластины.

Для определения критического размера зоны предельного состояния материала необходимо иметь две кривые (рис. 3.6): кривая 1 характеризует зависимость длины зоны предельного состояния материала  $d$  возле отверстия от напряжения  $\sigma_0$ , приложенного к торцам пластины; кривая 2 устанавливает зависимость длины радиальной трещины  $d$ , выходящей на контур отверстия в опасном сечении пластины, от  $\sigma_0$ .

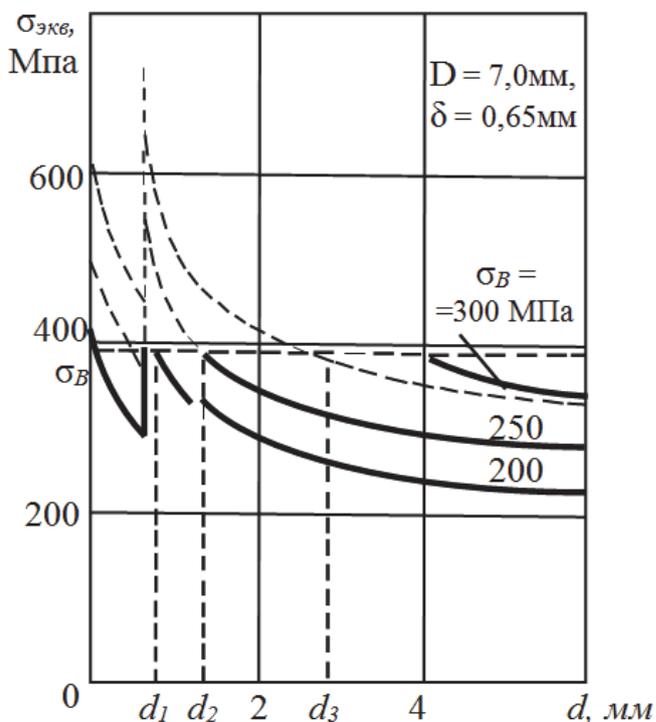


Рис. 3.7. Определение размеров зон предельного состояния материала  $d$  с помощью эпюр  $\sigma_{экв}$

Кривая 2 (рис. 3.6) строится с использованием формул (3.11) и (3.12) при  $k_1 = \kappa_1^{(1)} = k_c$ . Для получения кривой 1 необходимо предварительно выполнить следующее. На основании формул (3.4) и (3.5) подсчитывается напряженное состояние в ослабленном сечении пластины при различных значениях напряжения  $\sigma_0$ .

В качестве примера найдем предельное состояние пластины конечной ширины ( $2w = 140$  мм,  $2H = 400$  мм,  $t = 1,83$  мм), ослабленной пробоем в виде кругового отверстия диаметром 7 мм (рис. 3.1). В расчетах

используем характеристики материала образцов, исследование которых было описано выше в разделе 3.4.

За критерий прочности сплошного материала примем критерий статического разрушения материалов:

$$\sigma_{\text{экв}} \geq \sigma_B, \quad (3.13)$$

в котором согласно теории прочности Писаренко–Лебедева

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{сж}}} \cdot \sigma_l + \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{сж}}}\right) \sigma_1, \quad (3.14)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений, а  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – главные напряжения.

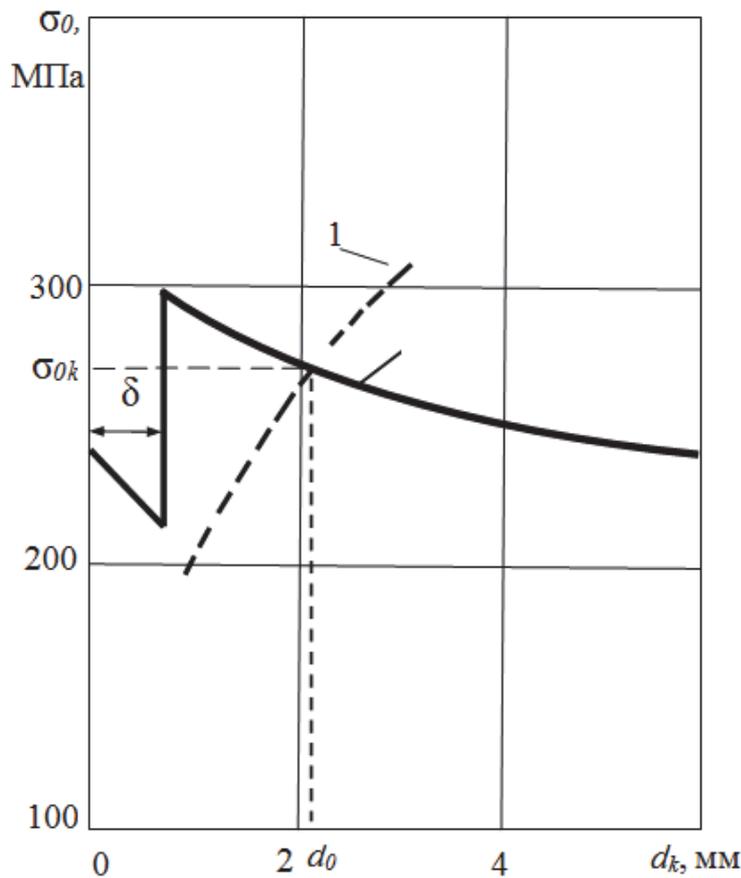


Рис. 3.8. Определение напряжения  $\sigma_0$ , при котором пластина разрушается

$\sigma_{\text{экв}}$  в опасном сечении пластины при нескольких значениях напряжения  $\sigma_0$  (рис. 3.8). При построении эпюр учтен критерий прочности материала (3.28), поэтому те части графиков напряжений  $\sigma_{\text{экв}}$ , которые расположены выше уровня  $\sigma_B$ , заменены равномерно распределенными с ординатой

Для вычисления напряжений  $\sigma_{\text{экв}}$  в опасном сечении воспользуемся формулой (3.14). Напряжение  $\sigma_1$  определяется из соотношений (3.4) и (3.5), а формулу для расчета напряжений  $\sigma_2$  возьмем из решения для бесконечной плоскости, подкрепленной кольцом, при действии осевых растягивающих сил на бесконечности [124]. Указанное решение [124] можно применить к пластинам конечных размеров, если отношение радиуса  $R_k$  половине ширины пластины  $w$ , т.е.  $R/w$ , будет меньше 0,2. В нашем случае  $R/w = 0,06$ .

По данным расчета строим эпюры распределения напряжения

$\sigma_B$ . Длина горизонтального участка эпюры  $\sigma_{экр}$  выбирается из условия равновесия отсеченной части пластины. Границами горизонтальных участков графиков напряжений  $\sigma_{экр}$  являются точки 1, 2 и 3 (рис. 3.7). Абсциссы точек 1, 2 и 3 определяют границы размеров зон предельного состояния материала. Следовательно  $d = 0,8; 1,5$  и  $2,6$  мм для соответствующих значений  $\sigma_0 = 200, 250$  и  $300$  МПа. На основании полученных данных, построена зависимость  $\sigma_0 - d$  (кривая 1 на рис. 3.8).

Далее с помощью критерия прочности (2.2) и формул (3.11) и (3.12) получаем условие разрушения соответственно для пластины, когда трещина расположена только в кольце или проходит сквозь кольцо и выходит в пластине:

$$\kappa_1^{(1)} = K_c = M^{(1)} \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F^{(1)}(\varepsilon_1, \omega_1), \quad (3.15)$$

$$\kappa_1 = K_c = M \sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F(\varepsilon, \omega).$$

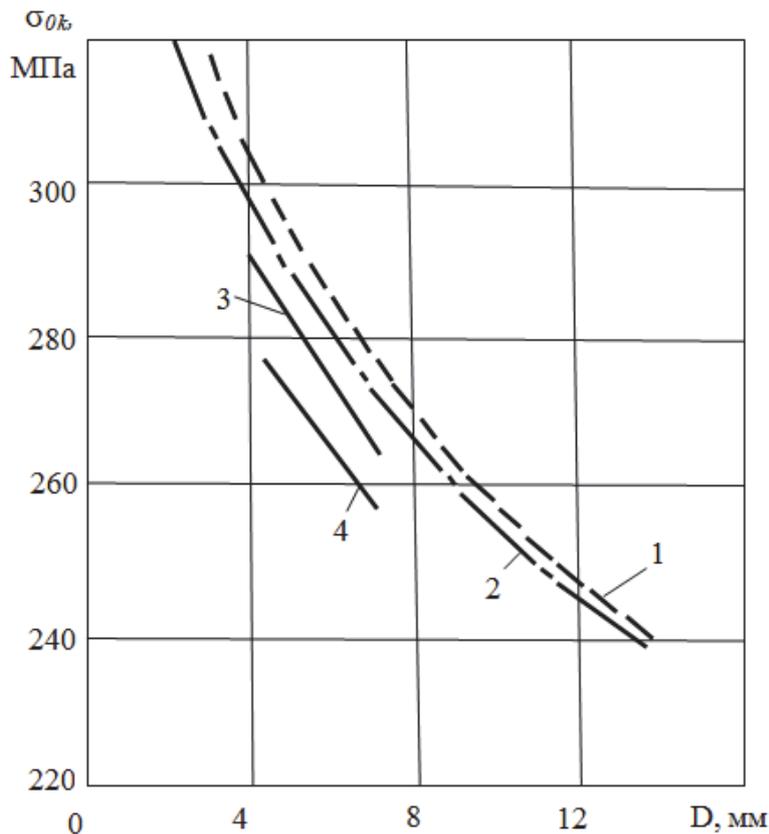


Рис. 3.9. Зависимость критического напряжения  $\sigma_0$  от внутреннего диаметра кольца  $D$   
 1 и 2 – теоретические кривые для толщин кольца  $\delta = 0,65$  и  $1,30$  мм соответственно;  
 3 и 4 – экспериментальные кривые для скоростей пробойника  $V = 1,0$  и  $1,5$  км/с.

По формулам (3.15) построена кривая 2 (рис. 3.8), где учтена поправка на размер пластической зоны у кончика трещины  $r_y = 7$  мм. В формулах (3.11) и (3.12) поправочные функции  $F(\varepsilon, \omega)$  и  $F^{(1)}(\varepsilon_1, \omega_1)$  вычислялись с помощью квадратурной формулы Гаусса с 32 узлами. По кривым 1 и 2 (рис. 3.9) найдено напряжение  $\sigma_0 = 280$  МПа, при котором пластина разрушается.

Аналогичные вычисления были проведены для пластин с отверстиями при двух толщинах кольца  $t = 0,65$  и  $1,30$  мм (кривая 1 и 2 на рис. 3.9).

С целью проверки предложенного способа определения предельного состояния были проведены испытания поврежденных образцов, геометрические размеры которых и механические характеристики материала приведены выше в данном разделе.

Для испытания на растяжение было подготовлено 18 образцов, поврежденных высокоскоростными механическими частицами с различной массой и скоростью. Данные промеров поврежденных зон образцов и металлографического анализа приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Параметры зон повреждения пробитых образцов

Номер образца	Скорость пробойника $V$ , км/с	Масса пробойника $m$ , г	Диаметр отверстия $D$ , мм	Глубина зоны повреждения $\delta$ , мм
1	1,0	0,4	4,0	0,5
2	1,0	0,4	4,0	0,5
3	1,0	0,4	4,6	0,5
4	1,0	0,4	4,5	0,5
5	1,0	0,8	5,2	1,0
6	1,0	0,8	5,3	1,0
7	1,0	0,8	5,1	1,0
8	1,0	1,2	6,2	1,4
9	1,0	1,2	6,0	1,0
10	1,5	0,4	4,6	1,0
11	1,5	0,4	4,6	1,0
12	1,5	0,4	4,7	1,0
13	1,5	0,4	4,7	1,0
14	1,5	0,8	6,3	1,3
15	1,5	0,8	6,1	1,3
16	1,5	0,8	6,0	1,3
17	1,5	1,2	7,0	1,4
18	1,5	1,2	7,2	1,4

Испытания образцов на растяжение производились на разрывной испытательной машине Р-50. Результаты эксперимента приведены на рис. 3.9 в виде кривых 3 и 4 для двух скоростей механических частиц. При скорости частиц  $V = 1,0$  км/с пластическое деформирование материала пластин распространилось на глубину от 0,5 до 1,0 мм, а при  $V = 1,5$  км/с – от 1,0 до 1,4 мм при массе частиц  $m = 0,4; 0,8; 1,2$  г. Таким образом, пластины с отверстием, подкрепленных кольцом толщиной  $t = 0,65$  мм, моделируют образцы, поврежденные частицами при скорости  $V = 1,0$  км/с, а с кольцом толщиной  $t = 1,30$  мм – при скорости  $V = 1,5$  км/с. Наибольшее расхождение теоретических и экспериментальных данных для рассматриваемых скоростей частиц не превышает 6%.

### 3.6. Заключение по разделу 3

1. Разработан теоретический способ определения предельного состояния элементов конструкций из изотропного материала с концентратором в форме кругового выреза.

2. С целью реализации предлагаемого способа развит метод сечений для вычисления напряженного состояния в ослабленном сечении полосы с круговым отверстием и коэффициентов интенсивности напряжений в данной полосе при наличии двух радиальных трещин.

3. Предложенный способ определения предельного состояния распространен на расчет плоских элементов конструкций, поврежденных высокоскоростными механическими частицами. В процессе реализации данного способа получены формулы для вычисления напряженного состояния в ослабленном сечении пластины конечной ширины с подкрепленным отверстием (подкрепление моделирует зону поврежденного материала) и для КИН в указанной пластине при наличии двух радиальных трещин.

4. Разработан способ определения упругих характеристик материала в зоне повреждения.

5. С использованием предложенного способа определения предельного состояния выполнены расчеты напряженного и критического состояния пластин с круговым вырезом и пластин с подкрепленным отверстием.

6. Испытание пластин из сплавов Д16АТ с вырезами и АМГ6М с повреждениями подтверждает эффективность разработанного способа определения предельного состояния.

## 4. ВЛИЯНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ОТВЕРСТИЙ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН

Во второй главе предложен способ определения предельного состояния пластины с одним отверстием. В данной главе подход, предложенный выше, распространяется на случай наличия нескольких отверстий в элементе конструкции.

### 4.1. Постановка задачи

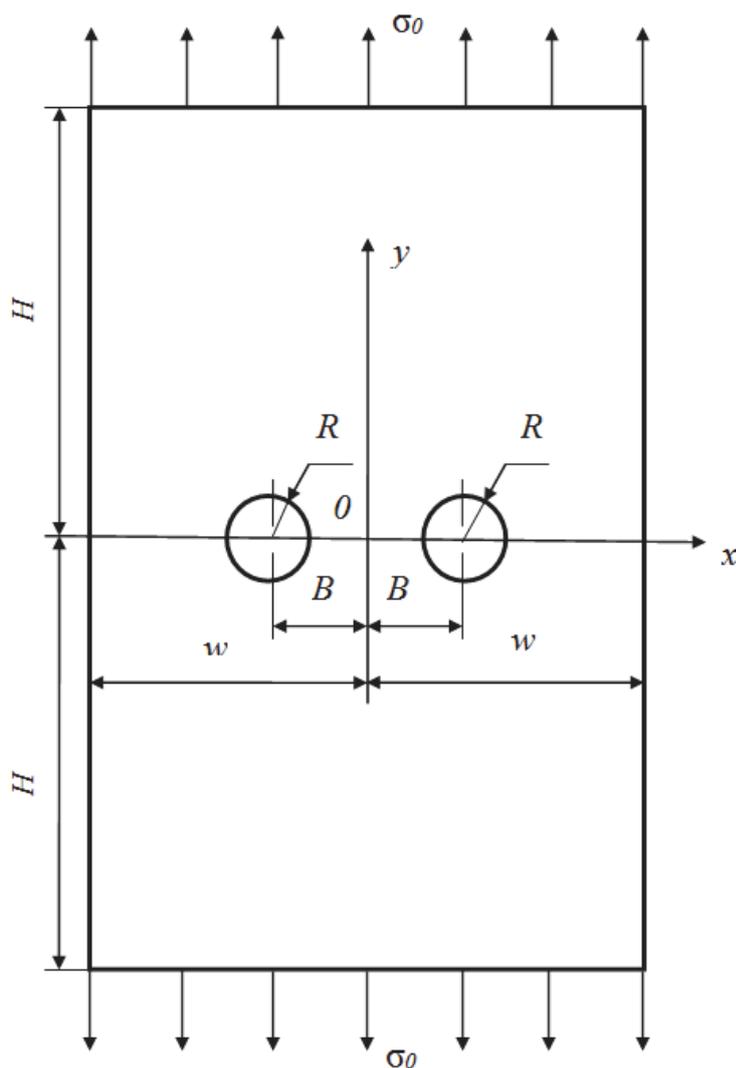


Рис. 4.1. Пластина с двумя отверстиями

Рассмотрим пластину конечной ширины с рядом отверстий, центры которых лежат на одной прямой. Расположение отверстий симметрично срединной линии пластины. Перпендикулярно прямой, соединяющей центры отверстий, на достаточном удалении от вырезов действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения.

В процессе возрастания нагрузки возле отверстий в опасном сечении возникают зоны предельного состояния материала. В этих зонах наблюдается нарушение сплошности материала, что эквивалентно образованию трещин. При дальнейшем увеличении нагрузки зоны предельного состояния (трещины) увеличиваются до

тех пор, пока какая-нибудь из трещин не достигнет критической длины. Затем произойдет практически мгновенное разрушение пластины.

Для решения данной задачи необходимо знать напряжения в опасном сечении пластины с отверстиями и коэффициенты интенсивности напря-

жений в кончиках радиальных трещин, выходящих на контуры отверстий. Более подробное описание метода дадим на примере расчета предельного состояния пластины конечной ширины с двумя отверстиями (рис. 4.1).

Рассмотрим способ определения напряжений в ослабленном сечении пластины с несколькими отверстиями и вычисление КИН в полосе с двумя отверстиями и четырьмя радиальными трещинами.

## 4.2. Определение напряженного состояния в пластине с несколькими отверстиями

Предлагается численный метод определения напряжений в пластине, ослабленной отверстиями различной формы. Применяемый подход к решению поставленной задачи близок к методу разложений по неортогональным функциям [1] и является развитием метода суперпозиции сингулярных решений [87,88].

Рассмотрим пластину бесконечных размеров. Решение для бесконечной области может быть применено к пластине конечной ширины, если отверстия расположены на достаточно большом удалении (более пяти радиусов ближайшего к грани пластины отверстия) от ее краев.

Пусть пластина, расположенная в плоскости  $(x,y)$ , ослабленная несколькими непересекающимися отверстиями с контурами  $S_i$  и находящаяся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, подвергается одноосному, вдоль оси  $Oy$ , растяжению (рис. 3.2). Вектор перемещения точек пластины  $\vec{U} = \vec{U}_o + \vec{U}_d$ , где  $\vec{U}_o$  и  $\vec{U}_d$  – векторы перемещения основного и добавочного, вызванного наличием отверстий, деформированных состояний соответственно, удовлетворяет в области  $V$  уравнению равновесия [76] при отсутствии массовой силы ( $\vec{K} = 0$ )

$$\nabla^2 \vec{U} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla \nabla \cdot \vec{U} + \vec{K} = 0, \quad (4.1)$$

а также граничным условиям в напряжениях на контурах отверстий

$$\vec{n}_i \cdot \hat{\sigma}(\vec{U}) = 0 \quad \text{на } S_i (i = \overline{1, N}), \quad (4.2)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\vec{n}_i$  – единичные векторы внешних нормалей к  $S_i$ ;  $\hat{\sigma}(\vec{U})$  – тензор напряжений, получаемый из закона Гука по вектору перемещения ( $\vec{U}$ );  $N$  – количество отверстий.

Обозначим через  $\vec{U}^{(k)}(x - a, y - c)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) векторы полей перемещений, являющиеся сингулярными решениями уравнения равновесия (4.1), порожденные действием массовых сил четырех видов [87].

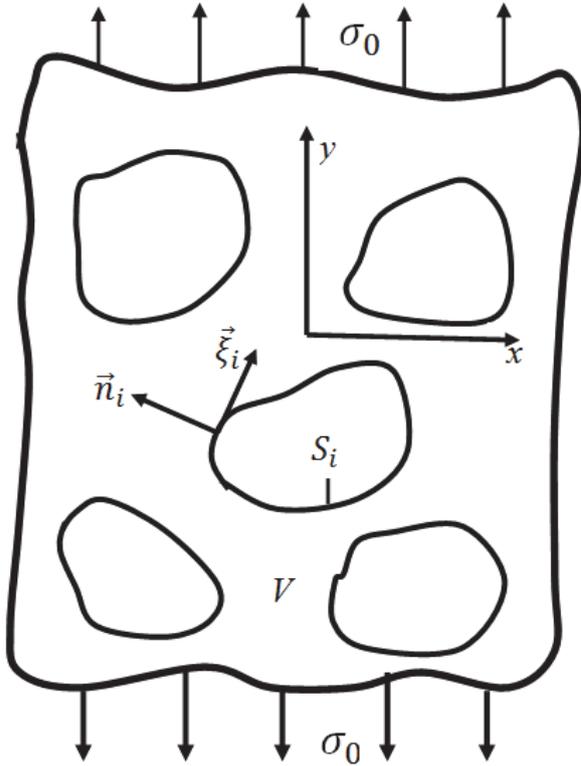


Рис. 4.2. Пластина с несколькими отверстиями

Приведем вкратце, без вывода, некоторые, т. н. сингулярные, решения плоской задачи теории упругости для плоскости, находящейся в условиях плоского обобщенного напряженного состояния. Эти необходимые нам решения являются решениями неоднородного уравнения равновесия в перемещениях (4.1) при определенных видах вектора массовой силы  $\vec{K}$ . Нам понадобятся следующие четыре типа сингулярных решений [87]:

1. Массовая сила представляет собой приложенную в точке  $(a, c)$  сосредоточенную силу интенсивности  $-4\pi/(1+\nu)$ , направленную вдоль оси  $Ox$

$$\vec{K} = -\frac{4\pi}{1-\nu} \delta(\vec{R}) \vec{i}, \quad (4.3)$$

где  $\delta(\vec{R})$  – дельта-функция Дирака;  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{\xi}$  – радиус-вектор точки приложения силы. Компоненты вектора перемещений

$$\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(1)}(\vec{r}, \vec{\xi}) = \vec{U}^{(1)}(x - a, y - c)$$

и тензора напряжений

$$\vec{\sigma}^{(1)} = \vec{\sigma}^{(1)}(\vec{r}, \vec{\xi}) = \vec{\sigma}^{(1)}(x - a, y - c)$$

возмущенного поля, вызванного действием этой силы, будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \frac{1-\nu}{E} f, f = \frac{3-\nu}{1-\nu} \ln R - \frac{(x-a)^2}{R^2}, \\ U_y &= \frac{1-\nu}{E} f, g = -\frac{(x-a)(y-c)}{R^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{xx} = A; \quad A = (x-a) \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{2(x-a)^2}{R^4} \right];$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= B; & B &= (x - a) \left[ -\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{2(y - a)^2}{R^4} \right]; \\ \sigma_{xy} &= C; & C &= (y - a) \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{2(x - a)^2}{R^4} \right]\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\text{где } R = |\vec{R}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - c)^2}.$$

2. Массовая сила представляет собой приложенную в точке  $(a, c)$  сосредоточенную силу интенсивности  $-4\pi/(1+\nu)$ , направленную вдоль  $Oy$

$$\vec{K} = -\frac{4\pi}{1-\nu} \delta(\vec{R}) \vec{j}, \quad (4.6)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}U_x &= \frac{1 + \nu}{E} g, & U_y &= \frac{1 + \nu}{E} e, \\ e &= \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \ln R - \frac{(y - a)^2}{R^2};\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E; & E &= (y - a) \left[ -\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{2(x - a)^2}{R^4} \right]; \\ \sigma_{yy} &= F; & F &= (y - a) \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{2(y - a)^2}{R^4} \right]; \\ \sigma_{xy} &= G; & G &= (x - a) \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{2(y - a)^2}{R^4} \right]\end{aligned}\quad (4.8)$$

3. Массовая сила представляет собой центр дилатации, приложенный в точке  $(a, c)$ , интенсивности  $-2\pi/(1-\nu)$ ,

$$\vec{K} = -\frac{2\pi}{1-\nu} \cdot \nabla \delta(\vec{R}), \quad (4.9)$$

Эта массовая сила (и соответствующее ей решение) может быть получена как сумма двух двойных сил без моментов, приложенных в той же точке  $(a, c)$ , и направленных вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Соответствующие перемещения и напряжения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}U_x &= \frac{1 + \nu}{E} d, & d &= \frac{(x - a)}{R^2}, \\ U_y &= \frac{1 + \nu}{E} p, & p &= \frac{(y - c)}{R^2},\end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = I; \quad I &= \frac{(y-c)^2 - (x-a)^2}{R^4}; \\ \sigma_{xy} = -P; \quad P &= \frac{2(x-a)(y-c)}{R^4}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

4. Массовая сила представляет собой центр вращения в точке  $(a, c)$ , с осью, перпендикулярной плоскости  $(x, y)$

$$\vec{K} = \pi \cdot \nabla \times [\vec{k} \cdot \delta(\vec{R})], \quad (4.12)$$

где  $\vec{k}$  – орт оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости  $(x, y)$ . Тройка векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правая. Эта массовая сила может быть получена как сумма двух взаимноперпендикулярных двойных сил с моментами, направленными по  $\vec{k}$  и приложенными в той же точке  $(a, c)$ .

Соответствующие перемещения и напряжения имеют вид:

$$U_x = -\frac{1+\nu}{E} P, \quad U_y = \frac{1+\nu}{E} d, \quad (4.13)$$

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = P; \quad \sigma_{xy} = I; \quad (4.14)$$

Для решения поставленной задачи представим вектор перемещения  $\vec{U}_d$  в виде суперпозиции вышеотмеченных четырех сингулярных решений  $\vec{U}^{(k)} (i = \overline{1, N}) = 1$ , каждый из которых полностью лежит внутри соответствующего контура отверстия  $S_i$

$$\vec{U}_d = \sum_{i=1}^N \int_{S_i^*} \sum_{k=1}^4 \Phi^k(a, c) \vec{U}(x-a, y-c) S_i^* \quad (4.15)$$

Контурные интегралы в формуле (4.15) заменим их приближенными значениями, используя М-точечную формулу трапеций или квадратурную формулу Гаусса. Имеем

$$\vec{U}_d(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \omega_j \sum_{k=1}^4 \Phi_{ij}^{(k)} \vec{U}_{ij}^{(k)}(x, y), \quad (4.16)$$

где  $\omega_j$  – весовые коэффициенты;  $\Phi_{ij}^{(k)} = \Phi^{(k)}(a_{ij}, c_{ij})$  – значения искомым плотностей распределения в узловых точках  $(a_{ij}, c_{ij}) \in S_i^*$ ;

$$\vec{U}^{(k)}(x, y) = \vec{U}^{(k)}(x - a_{ij}, y - c_{ij}).$$

Для отыскания неизвестных значений  $\Phi_{ij}^{(k)}$  воспользуемся, как и ранее [87], принципом минимума потенциальной энергии деформации системы  $\Omega$  [65] при отсутствии напряжений на контурах отверстий

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & \iint_V \left[ \nabla\nabla^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla\nabla \cdot \vec{U} \right] \cdot \delta\vec{U} dV + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{n}_i \cdot \partial(\vec{U}) \cdot \delta\vec{U} dS_i = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В виду произвольности  $\partial(\vec{U})$  в области  $V$ , занятой пластиной, выполнение условия стационарности  $\delta\Omega = 0$  требует обращения в ноль всех подинтегральных выражений, что приводит к однородному ( $\vec{K} = 0$ ) уравнению равновесия (4.1) и граничным условиям (4.2). Так как в выражении для вектора перемещений (4.16) векторы  $\vec{U}_{ij}^{(k)}(x, y)$  удовлетворяют уравнению равновесия (4.1), то система линейных алгебраических уравнений для определения значений  $\Phi_{ij}^{(k)}$  получается из выражения (4.17)

$$\sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{n}_i \cdot \partial(\vec{U} + \vec{U}_d) \cdot \delta\vec{U}_d dS_i = 0.$$

Подставляя сюда вместо  $\vec{U}_d$  его представление в виде (4.16) и приравнявая нулю выражение при вариациях неизвестных постоянных, получаем систему  $4MN$  линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \omega_j \sum_{k=1}^4 \Phi_{ij}^{(k)} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{n}_i \cdot \partial(\vec{U}_{ij}^{(k)}) \cdot \delta\vec{U}_{\alpha\beta}^{(\gamma)} dS_i = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{n}_i \cdot \partial(\vec{U}_{ij}^{(k)}) \cdot \delta\vec{U}_{\alpha\beta}^{(\gamma)} dS_i \end{aligned} \quad (4.18)$$

для  $4MN$  неизвестных  $\Phi_{ij}^{(k)}$ .

В качестве иллюстрации применения предложенного численного метода проведем сравнение результатов, полученных на его основе, с известным решением одной задачи теории упругости [123].

Получим основные выражения для численного решения данной задачи. Рассмотрим пластину, ослабленную двумя одинаковыми непересекающимися отверстиями радиуса  $r$ , центры которых лежат на оси  $Ox$  в точках  $O_1$  и  $O_2$  на расстоянии  $2(r+B)$  друг от друга (рис. 4.3). Осевое растягивающее напряжение  $\sigma_0 = const$  действует в направлении оси  $Oy$ .

Контуры отверстий обозначим через  $S_1$  и  $S_2$ , а их радиусы – через  $r_1$  и  $r_2$ . Для каждого из отверстий введем свою локальную декартовую  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, 2$ ) и полярную  $(r_i, \theta_i)$  системы координат с центрами в точках  $O_i$  так, что оси  $x_i$  направлены по оси  $Ox$ . Обход контуров  $S_1$  и  $S_2$  будем производить против часовой стрелки. При этом соответствующие единичные нормали и касательные в точках этих контуров будут направлены по соответствующим ортам локальных полярных систем координат, т.е.  $\vec{n}_i$  будут совпадать с  $\vec{e}_{r_i}$  и

направлены внутрь пластины, а  $\vec{\tau}_i$  будут совпадать с  $\vec{e}_{\theta i}$  и направлены в сторону увеличения углов  $\theta_i$ . Обозначим также через  $2B$  расстояние между центрами отверстий. Связь между локальными полярными координатами  $(r, \theta)$  и декартовыми координатами  $(x, y)$  выражается формулами:

$$\text{на } S_1 \begin{cases} x = r_1 \cdot \cos\theta_1 - B, \\ y = r_1 \cdot \sin\theta_1, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\text{на } S_2 \begin{cases} x = r_1 \cdot \cos\theta_2 + B, \\ y = r_1 \cdot \sin\theta_2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Формулы преобразования компонент вектора перемещений и тензора напряжений при переходе от декартовой к полярной системе координат записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_r &= U_x \cdot \cos\theta + U_y \cdot \sin\theta; \quad U_\theta = -U_x \cdot \sin\theta + U_y \cdot \cos\theta. \\ \begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\sigma_{xy}\sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sigma_{r\theta} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\sin\theta \cdot \cos\theta + \sigma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta); \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx}\sin^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\theta - 2\sigma_{xy}\sin\theta \cdot \cos\theta. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Вектор перемещений  $\vec{U}$  точек пластины, возникший при растяжении, удовлетворяет в области  $V$  уравнению равновесия (4.1) при отсутствии массовой силы  $\vec{K}$ .

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины со свободными от напряжений отверстиями при следующих граничных условиях

$$\vec{n}_i \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S_{1,2}$$

или в координатной форме

$$\sigma_{r_i r_i} = 0; \quad \sigma_{r_i \theta_i} = 0; \quad \text{на } S_{1,2}.$$

Представление вектора перемещений и алгоритм нахождения фиктивных нагрузок. Искомый вектор перемещений точек пластины будем искать в виде суперпозиции решений, соответствующих сосредоточенной силе, параллельной оси  $Oy$ , сосредоточенной силе, параллельной оси  $Ox$ , центру дилатации и центру вращения, распределенных с неизвестными плотностями  $\Phi^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) вдоль контуров  $S_1^*$  и  $S_2^*$ , лежащих полностью внутри двух отверстий в пластине и представляющих собой окружности с центрами в точках  $O_j$  и радиусов (рис. 4.3)

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \frac{1+\nu}{E} \sum_{m=1}^2 \int_{S_m^*} [\Phi^{(1)}(f \cdot \vec{i} + g \cdot \vec{j}) + \Phi^{(2)}(g \cdot \vec{i} + \\ &+ e \cdot \vec{j}) + \Phi^{(3)}(d \cdot \vec{i} + p \cdot \vec{j}) + \Phi^{(4)}(-p \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j})] dS,^* \end{aligned} \quad (4.22)$$

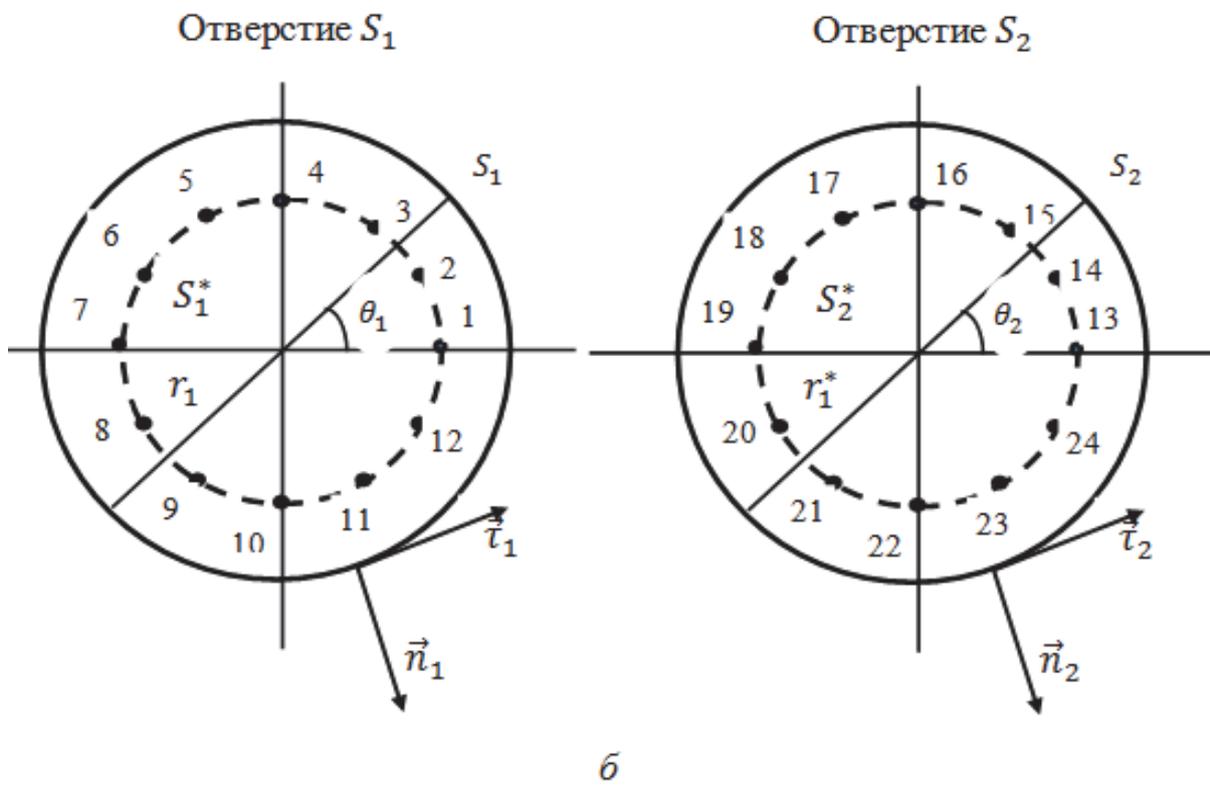
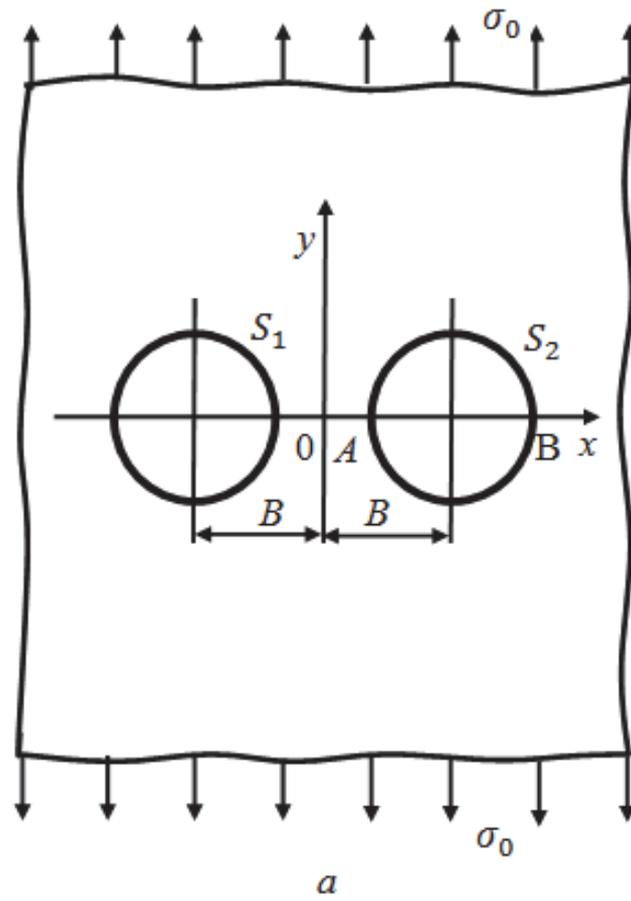


Рис. 4.3. Расположение фиктивных нагрузок в пластине

где  $f = f(x, y; a, c), \dots, p = p(x, y; a, c)$  – функции, определяемые формулами (4.4), (4.7), (4.10);  $(a, c)$  – точки приложения фиктивных (четырёх типов) нагрузок. Переходя от непрерывного к дискретному распределению фиктивных нагрузок для искомого вектора перемещения, будем иметь представление

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1+\nu}{E} \sum_{n=1}^N \left[ \Phi_n^{(1)} f_n + \Phi_n^{(2)} g_n + \Phi_n^{(3)} d_n + \Phi_n^{(4)} p_n \right]; \\ U_y &= \frac{1+\nu}{E} \sum_{n=1}^N \left[ \Phi_n^{(1)} g_n + \Phi_n^{(2)} e_n + \Phi_n^{(3)} p_n + \Phi_n^{(4)} d_n \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $f_n, \dots, p_n$  определяются формулами (4.4), (4.7), (4.10) при  $a = a_n, c = c_n$ ;  $(a_n, c_n)$  – точки приложения фиктивных нагрузок, причем точки  $(a_n, c_n)$  лежат: на окружности  $S_1^*$ , если  $n \leq N_1$ ; на окружности  $S_2^*$ , если  $N_1 < n \leq N_2$ . При этом  $N$  – общее количество точек приложения фиктивных нагрузок и сохраняется их сквозная нумерация при переходе от контура к контуру – от  $S_1^*$  к  $S_2^*$ . Представленный таким образом вектор перемещений удовлетворяет уравнению равновесия (4.1) всюду в области  $V$  и для его полного определения остается найти неизвестные постоянные  $\Phi_n^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}; n = \overline{1,4}$ ) – значения плотности в точках  $(a_n, c_n)$ , т. е.  $\Phi_n^{(i)} = \Phi^{(i)}(a_n, c_n)$  – из граничного условия (4.20).

Соответствующие вектору перемещений (4.23) компоненты тензора напряжений будут определяться формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{n=1}^N \left[ \Phi_n^{(1)} A_n + \Phi_n^{(2)} E_n + \Phi_n^{(3)} I_n + \Phi_n^{(4)} P_n \right]; \\ \sigma_{yy} &= \sum_{n=1}^N \left[ \Phi_n^{(1)} B_n + \Phi_n^{(2)} F_n + \Phi_n^{(3)} I_n + \Phi_n^{(4)} P_n \right]; \\ \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^N \left[ \Phi_n^{(1)} C_n + \Phi_n^{(2)} G_n + \Phi_n^{(3)} P_n + \Phi_n^{(4)} I_n \right]; \end{aligned} \quad (4.24)$$

где  $A_n, \dots, I_n$  определяются формулами (4.5), (4.8), (4.11) при  $a = a_n, c = c_n$ .

Подставив в соотношение (4.18) выражение для компонент векторов перемещений и тензоров напряжений (4.21)–(4.23) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения  $4N$  неизвестных  $\Phi_n^{(i)}$ . После определения констант  $\Phi_n^{(i)}$  напряженно-деформированное состояние пластины с отверстиями рассчитывается по формулам (4.23) и (4.24).

На рис. 4. 4 представлены результаты расчета отношения  $\sigma_{yy}/\sigma_0$  для различных  $(B-r)/r$  ( $\nu = 0,32$ ) в точках  $A$  и  $A^*$ . Сплошная линия соответствует данным из [123], точки найдены с использованием предлагаемого мето-

да. Погрешность разработанного метода составляет не более 0,6%. При этом контуры  $S_{1,2}^*$  представляют собой окружности радиуса  $r^* = 0,8r$ , концентрические по отношению к контурам отверстий, вдоль каждой из которых равномерно по дуге окружности располагаются по 24 узловых точки  $(a_{i,j}, c_{i,j})$  ( $i=1,2; j=\overline{1,24}$ ).

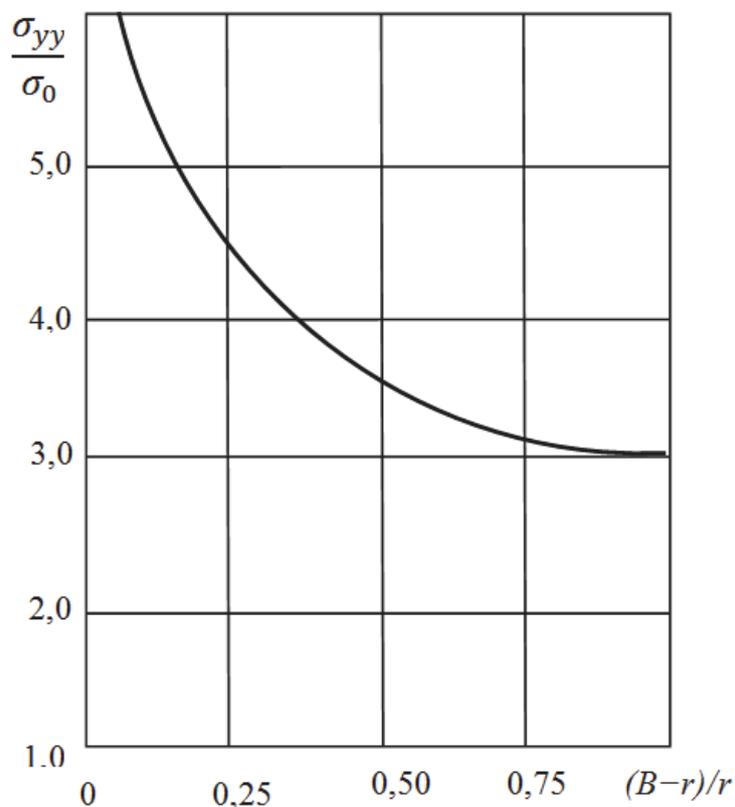


Рис. 4.4. Зависимость концентрации напряжений в точках  $A$  и  $A^*$  от отношения  $(B-r)/r$

### 4.3. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для полосы конечной ширины при наличии в ней двух отверстий и четырех радиальных трещин

Рассмотрим задачу (рис. 4.5) о растяжении упругой однородной и изотропной полосы шириной  $2w$ , содержащей два одинаковых круговых отверстия с радиусом  $R$ , расположенные симметрично относительно срединной линии  $AA^*$ . Расстояния от центров отверстий до линии  $AA^*$  равны  $B$ . На контур каждого из отверстий выходят две поперечные трещины (поперечные в том смысле, что линия этих трещин перпендикулярна граням полосы) длиной  $\alpha_m$  и  $\alpha_p$  соответственно.

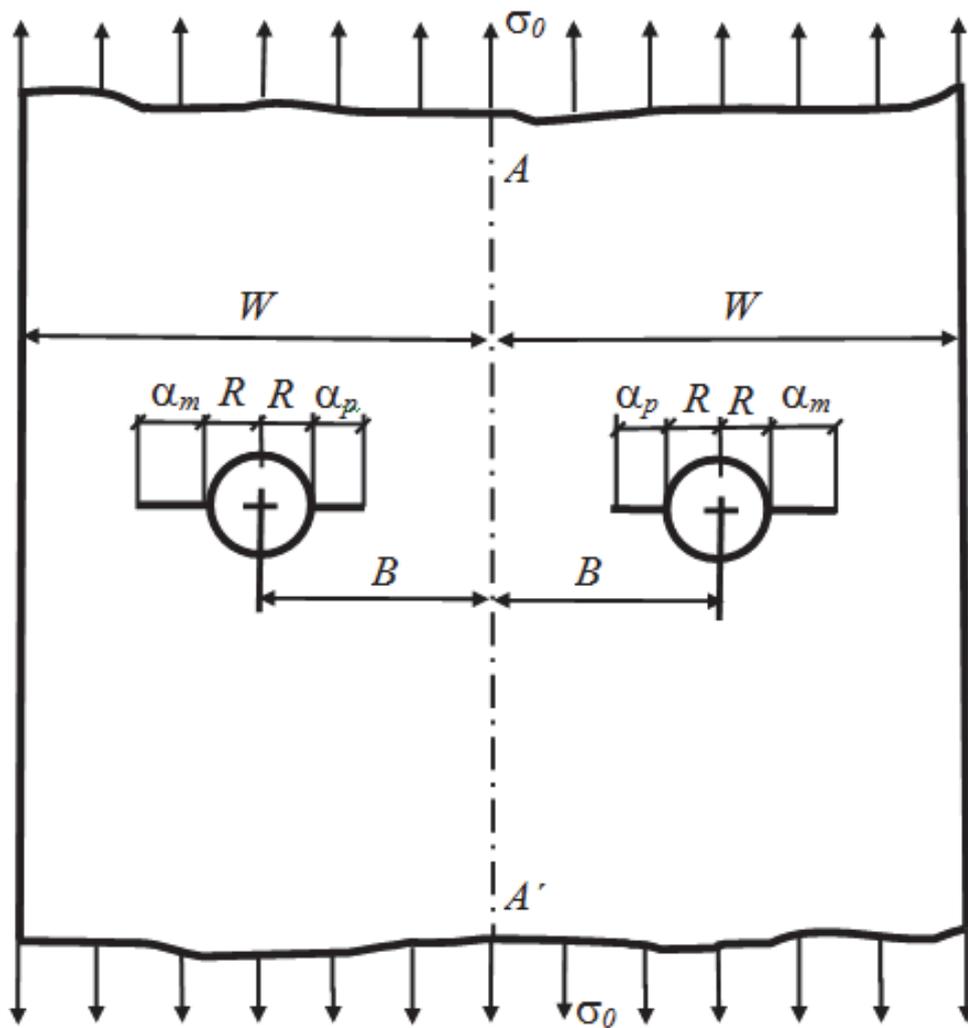


Рис. 4.5. Пластина с двумя круговыми отверстиями и четырьмя трещинами

Боковые грани полосы, контуры круговых отверстий и поверхности трещины считаются свободными от внешних нагрузок. На достаточном удалении от отверстий в поперечных сечениях полосы действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения  $\sigma_0 = const$ .

Очевидно, распределение напряжений и перемещений в исходной полосе шириной  $2W$  является симметричным относительно срединной линии  $AA^*$ . В силу этого достаточно построить решение лишь для половины исходной полосы (т.е. для полосы шириной  $W$ ), сформулировав на линии  $AA^*$ , граничные условия, вытекающие из симметрии задачи. Для рассматриваемой задачи условия симметрии на линии  $AA^*$  можно приближенно заменить условиями отсутствия нормальных и касательных напряжений.

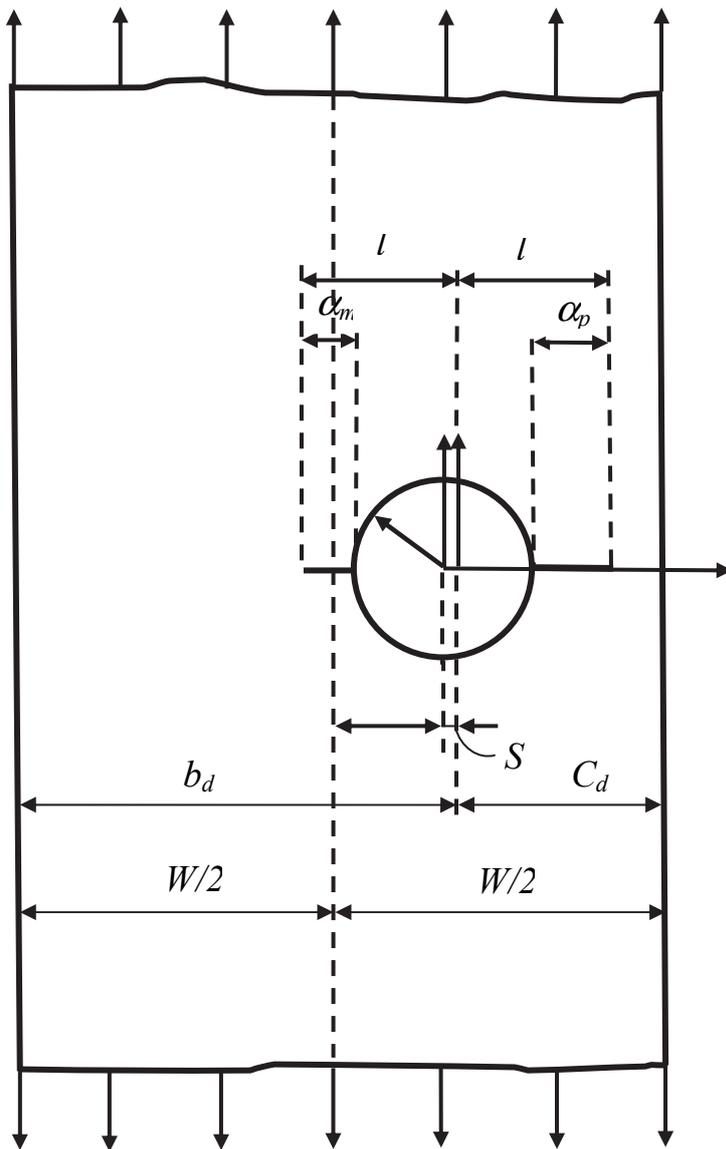


Рис. 4.6. Пластина с нецентральной круговым отверстием и двумя радиальными трещинами

С учетом вышесказанного исходная задача приводится к следующей (см. рис. 4.6). Полоса шириной  $W$  содержит нецентральное круговое отверстие с радиусом  $R$ . Расстояние от центра отверстия до дальней от него грани полосы равно  $b_d - S$ . На контур отверстия выходят две поперечные трещины длиной  $\alpha_m$  и  $\alpha_p$  соответственно. Боковые грани полосы, контур кругового отверстия и поверхности трещины свободны от внешних нагрузок. На достаточном удалении от отверстия в поперечных сечениях полосы действуют растягивающие напряжения  $\sigma_0 = const$ .

Рассмотрим приближенный метод построения весовой функции для нецентральной поперечной трещины в полосе конечной ширины (рис. 4.7). В основе метода лежит использо-

вание выражений для нормальных напряжений на продолжении линии трещины, расположенной в неограниченной плоскости и нагруженной единичными нормальными сосредоточенными силами. Указанных выражений для напряжений в литературе найти не удалось, поэтому сначала построим решение этой задачи. Итак, рассмотрим задачу (рис. 4.7) для прямолинейной трещины длиной  $2l$ , расположенной в неограниченной однородной и изотропной пластине. В точке  $\zeta$  к поверхностям трещины приложены две единичные нормальные противоположно направленные сосредоточенные силы.

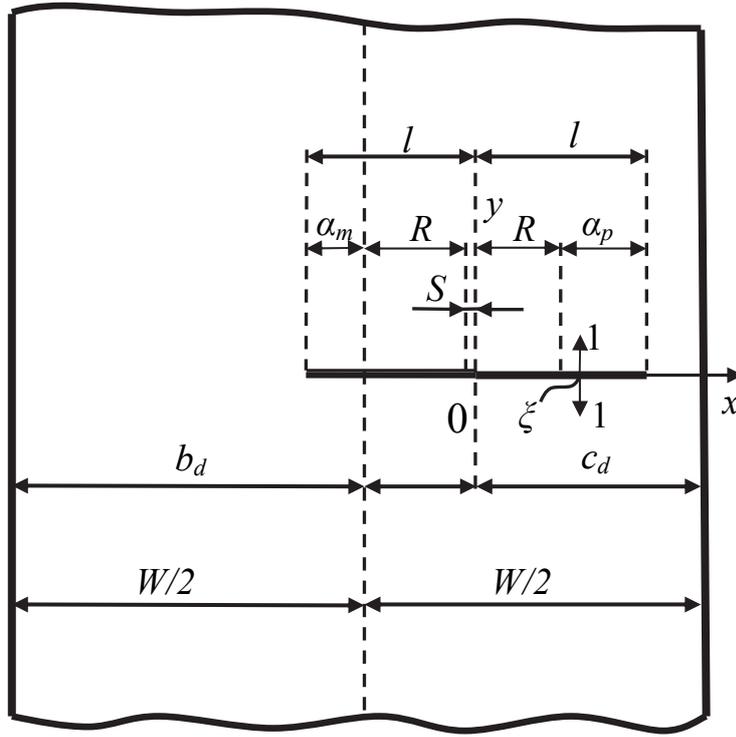


Рис. 4.7. Пластина с двумя трещинами

В силу симметрии задачи достаточно построить решение для полуплоскости  $y > 0$ . При этом граничные условия принимают вид

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -p(x), \quad |x| < 1, \quad (4.25)$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad |x| > 1, \quad (4.26)$$

где

$$p(x) = \delta(x - \xi).$$

Будем исходить из соотношения [121]

$$\bar{f}_s\{\sigma_{yy}(x, 0)\}(k) = -A|k|\bar{f}_s\{u_y(x, 0)\}(k), \quad (4.27)$$

в котором  $A = \mu(1-\nu)^{-1}$  для плоской деформации и  $A = \mu(1+\nu)$  для плоского напряженного состояния, а также использовано обозначение [121]

$$\bar{f}_s\{\varphi(x)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp(ikx) dx$$

для интегрального преобразования.

Вводя функции  $u(x) = u(x, 0)$  и  $\sigma_0 = -\sigma_{yy}(x, 0)$  запишем (4.25) и (4.27) так:

$$\bar{f}_s\{\varphi(x)\}(k) = -A|k|\bar{f}_s\{u_y(x, 0)\}(k), \quad (4.28)$$

$$\begin{cases} \sigma_{yy}(x,0) = -p(x), & |x| < 1, \\ u_y(x,0) = 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

Имеет место соотношение [55]

$$\bar{f}_s\{\varphi(x)\}(k) = 2\bar{f}_c\{\varphi_+(x)\}(k) + 2i\bar{f}_s\{\varphi_-(x)\}(k), \quad (4.30)$$

в котором

$$\begin{aligned} \bar{f}_c\{\varphi(x)\}(k) &= \int_0^\infty \varphi(x) \cos(kx) dx - \text{косинус-преобразование Фурье,} \\ \bar{f}_s\{\varphi(x)\}(k) &= \int_0^\infty \varphi(x) \sin(kx) dx - \text{синус-преобразование Фурье,} \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \varphi_+(x) &= \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2} \\ \varphi_-(x) &= \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

причем, очевидно,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_+(x) + \varphi_-(x), \\ \varphi_+(x) &= \varphi_+(-x), \varphi_-(x) = -\varphi_-(-x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Полагая теперь

$$\sigma(x) = \sigma_+(x) + \sigma_-(x), u(x) = u_+(x) + u_-(x), \quad (4.33)$$

с учетом (4.30) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{f}_c\{\sigma_+(x)\}(k) + i\bar{f}_s\{\sigma_-(x)\}(k) &= \\ = Ak[\bar{f}_c\{u_+(x)\}(k) + i\bar{f}_s\{u_-(x)\}(k)], \end{aligned} \quad (4.34)$$

где уже нет необходимости различать  $k$  и  $|k|$ .

Разделяя вещественную и мнимую части в (3.34), находим

$$\begin{aligned} \bar{f}_c\{\sigma_+(x)\}(k) &= Ak\bar{f}_c\{u_+(x)\}(k), \\ \bar{f}_s\{\sigma_-(x)\}(k) &= Ak\bar{f}_s\{u_-(x)\}(k) \end{aligned} \quad (4.35)$$

при этом граничные условия (4.29) заменяются следующими:

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x,0) = p_\pm(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u_\pm(x) = 0, & 0 \leq x \leq \infty. \end{cases} \quad (4.36)$$

Сначала построим решение нечетной задачи, для которой определяющими являются следующие соотношения:

$$\bar{f}_s\{\sigma_-(x)\}(k) = Ak\bar{f}_s\{u_-(x)\}(k), \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \sigma_\pm(x,0)=p_\pm(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \sigma_-(x)=0, & 0 \leq x \leq \infty. \end{cases} \quad (4.38)$$

где

$$p_-(x) = \frac{\delta(x-\xi)-\delta(-x-\xi)}{2} = \frac{\delta(x-\xi)-\delta(x+\xi)}{2}. \quad (4.39)$$

В (4.3) мы воспользовались четностью  $\delta$ -функции.  
С помощью соотношения

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

запишем синус-преобразование Фурье так

$$\begin{aligned} \bar{f}_s\{\varphi(x)\}(k) &= \int_0^\infty \varphi(x) \sin(kx) dx = \\ &= \left(\frac{\pi k}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) J_{\frac{1}{2}}(kx) dx = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} k}{2} S_{0,1/2}\{\varphi(x)\}(k), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где  $J_{1/2}(x)$  – функция Бесселя первого рода и использовано обозначение  $S_{\alpha,\beta}$  для обобщенных интегральных операторов Ханкеля.

Ниже используются свойства операторов Ханкеля  $S_{\alpha,\beta}$ , а также операторов Эрдейи-Кобера  $I_{\alpha,\beta}$  и  $K_{\alpha,\beta}$ . Определения и свойства этих операторов подробно изложены в [148-].

С помощью (4.40) перепишем (4.37) так:

$$S_{0,1/2}\{\sigma_-(x)\}(k) = AkS_{0,1/2}\{u_-(x)\}(k), \quad (4.41)$$

Обращая соотношение (4.41), получаем

$$\sigma_-(x) = AS_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\{kS_{0,1/2}\{u_-(x)\}(k)\}(x). \quad (4.42)$$

Вводя обозначение

$$\psi_-(k) = S_{0,1/2}\{u_-(x)\}(k), \quad (4.43)$$

представим (4.42) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_-(x) &= AS_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\{k\psi_-(k)(k)\}(x) = \\ &= \frac{2A}{x}S_{1, -\frac{3}{2}}\{\psi_-(k)\}(x)\end{aligned}\quad (4.44)$$

Обращая соотношение (4.43), находим

$$u_-(x) = S_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\{\psi_-(k)\}(x), \quad (4.45)$$

Удовлетворяя с помощью (4.44) и (4.45) граничным условиям (4.38), приходим к парным интегральным уравнениям относительно функции  $\psi_-(k)$ :

$$\begin{aligned}S_{1, -\frac{3}{2}}\{\psi_-(k)\}(x) &= \frac{x}{2A}p_-(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ S_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\{\psi_-(k)\}(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \infty.\end{aligned}\quad (4.46)$$

Используя обозначение

$$q_-(x) = \frac{x}{2A}p_-(x), \quad (4.47)$$

запишем (4.46) так:

$$\begin{aligned}S_{1, -\frac{3}{2}}\{\psi_-(k)\}(x) &= q_-(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ S_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\{\psi_-(k)\}(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \infty.\end{aligned}\quad (4.48)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}S_{1, -\frac{3}{2}}\{\psi_-(k)\}(x) &= T_-(x), \\ S_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\{\psi_-(k)\}(x) &= U_-(x),\end{aligned}\quad (4.49)$$

причем, очевидно,

$$u_-(x) = U_-(x), \quad \sigma_-(x) = \frac{2A}{x}T_-(x). \quad (4.50)$$

Решение парных уравнений (4.48) ищем в виде

$$\psi_-(k) = S_{0,1}\{h_-(z)\}(k), \quad (4.51)$$

где  $h_-(z)$  – пока некоторая неизвестная функция.

Подставляя (4.51) в (4.49), получаем

$$S_{1, -\frac{3}{2}} S_{0,1} h_- = T_-; \quad S_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} S_{0,1} h_- = U_-$$

или, что то же самое,

$$I_{0, -\frac{1}{2}} h_- = T_-; \quad K_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} h_- = U_-, \quad (4.52)$$

где мы воспользовались свойствами операторов Ханкеля.

Обращая соотношения (4.52), находим

$$h_- = K_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} T_-; \quad h_- = K_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} U_-. \quad (4.53)$$

Введем интервалы  $z_1 = [0, 1]$ ,  $z_2 = [1, \infty]$  и обозначения

$$h_-, T_-, U_- = \begin{cases} h_-^{(1)}, T_-^{(1)}, U_-^{(1)} & \text{на } z_1 \\ h_-^{(2)}, T_-^{(2)}, U_-^{(2)} & \text{на } z_2 \end{cases} \quad (4.54)$$

причем, в соответствии с парными уравнениями (4.48), нам неизвестны величины

$$U_-^{(2)} = 0; \quad T_-^{(1)} = q_-, \quad (4.55)$$

Распишем второе из равенств (4.52) по интервалам. Имеем

$$\begin{aligned} h_-^{(1)}(z) &= \begin{bmatrix} l \\ z \end{bmatrix} K_{1, -1/2} U_-^{(1)} + \begin{bmatrix} \infty \\ l \end{bmatrix} K_{1, -1/2} U_-^{(2)} && \text{на } z_1 \\ h_-^{(2)}(z) &= \begin{bmatrix} \infty \\ 1 \end{bmatrix} K_{1, -1/2} U_-^{(2)} && \text{на } z_2 \end{aligned} \quad (4.56)$$

отсюда, в силу первого равенства (4.55), следует

$$h_-^{(2)}(z) = 0; \quad h_-^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} l \\ z \end{bmatrix} K_{1, -1/2} U_-^{(1)}. \quad (4.57)$$

Распишем теперь первое из равенств (4.52) по интервалам:

$$\begin{aligned} h_-^{(1)}(z) &= \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, -1/2} T_-^{(1)} && \text{на } z_1 \\ &&& \text{на } z_2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$0 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, -1/2} T_-^{(2)} + \begin{bmatrix} Z \\ l \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, -1/2} T_-^{(2)}$$

откуда, с учетом второго равенства (4.55), получаем

$$\begin{aligned} h_-^{(1)}(z) &= \begin{bmatrix} Z \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q_- \\ \begin{bmatrix} Z \\ l \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} T_-^{(2)} &= - \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q_- \end{aligned} \quad (4.59)$$

Обращая второе соотношение (4.59), находим

$$T_-^{(2)}(x) = - \begin{bmatrix} x \\ l \end{bmatrix} I_{0, -\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q_- \quad (4.60)$$

Сначала определяем

$$\begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q_- = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^l \frac{q_-(u) du}{(z^2 - u^2)^{1/2}},$$

подставляя куда (4.47), получаем

$$\begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q_- = \frac{2}{\pi^{1/2} A} \int_0^l \frac{u p_-(u) du}{(z^2 - u^2)^{1/2}},$$

подставляя куда, в свою очередь, (4.59) окончательно находим

$$\begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} q_- = \frac{\xi}{2\pi^{1/2} A (z^2 - \xi^2)^{1/2}}, \quad (4.61)$$

что справедливо при  $\xi \ll 0$ .

Внося (4.61) в (4.60), получаем

$$\begin{aligned} T_-^{(2)}(x) &= - \frac{\xi}{2\pi A} \frac{d}{dx} \int_l^x \frac{z dz}{(x^2 - z^2)^{1/2} (z^2 - \xi^2)^{1/2}} = \\ &= - \frac{\xi}{2\pi A} \frac{d}{dx} \int_{l^2}^{x^2} \frac{dz}{(z - \xi^2)^{1/2} (x^2 - z)^{1/2}} = \\ &= - \frac{\xi}{2\pi A} \frac{d}{dx} \left[ \text{arctg}(\infty) - \text{arctg} \left( \frac{l^2 - \xi^2}{x^2 - l^2} \right) \right] = \\ &= - \frac{\xi (l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} x}{2\pi A (x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

С учетом (4.50) из (4.62) следует, что

$$\sigma_-(x) = -\frac{\xi(l^2 - \xi^2)^{1/2}}{\pi(x^2 - \xi^2)(x^2 - l^2)^{1/2}} \quad \text{при } l \leq x$$

и, следовательно

$$\sigma_{yy}^-(x) = \frac{\xi(l^2 - \xi^2)^{1/2}}{\pi(x^2 - \xi^2)(x^2 - l^2)^{1/2}} \quad \text{при } l \leq x. \quad (4.63)$$

Перейдем теперь к решению четной задачи, для которой имеем

$$\bar{f}_c\{\sigma_+(x)\}(k) = Ak\bar{f}_c\{u_+(x)\}(k), \quad (4.64)$$

$$\begin{cases} \sigma_+(x) = p_+(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_+(x) = 0, & 0 \leq x \leq \infty. \end{cases} \quad (4.65)$$

где

$$\begin{aligned} p_+(x) &= \frac{\delta(x - \xi) + \delta(-x - \xi)}{2} = \\ &= \frac{\delta(x - \xi) + \delta(x + \xi)}{2}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

С помощью соотношения

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

запишем косинус-преобразование Фурье в виде

$$\begin{aligned} \bar{f}_s\{\varphi(x)\}(k) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) J_{-\frac{1}{2}}(kx) dx = \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} k}{2} S_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{\varphi(x)\}(k), \end{aligned} \quad (4.67)$$

С учетом (4.67), соотношение (4.64) принимает вид

$$S_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{\sigma_+(x)\}(k) = AkS_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{u_+(x)\}(k). \quad (4.68)$$

Вводя обозначение

$$\psi_+(k) = S_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\{u_+(x)\}(k). \quad (4.69)$$

запишем (4.68) так:

$$S_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\{\sigma_+(x)\}(k) = Ak\psi_+(k) \quad (4.70)$$

Обращая соотношение (4.69) и (4.70), находим

$$\begin{aligned} u_+(x) &= S_{0, -1/2}\{\psi_+(k)\}(x). \\ \sigma_+(x) &= AS_{0, -1/2}\{k\psi_+(k)\}(x) = \\ &= \frac{2A}{x} S_{1/2, -3/2}\{\psi_+(k)\}(x) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Удовлетворяя с помощью (4.71) граничным условиям (4.65), приводим к парным интегральным уравнениям относительно функции  $\psi_+(k)$

$$\begin{aligned} S_{1/2, -3/2}\{\psi_+(k)\}(x) &= \frac{x}{2A} p_+(x), & 0 \leq x \leq l, \\ S_{0, -1/2}\{\psi_+(k)\}(x) &= 0, & 0 \leq x \leq \infty. \end{aligned}$$

которые с использованием обозначения

$$q_+(k) = \frac{x}{2A} p_+(x), \quad (4.72)$$

запишем так:

$$\begin{aligned} S_{1/2, -3/2}\{\psi_+(k)\}(x) &= q_+(k), & 0 \leq x \leq l, \\ S_{0, -1/2}\{\psi_+(k)\}(x) &= 0, & 0 \leq x \leq \infty. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Далее введем обозначения:

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}}\{\psi_+(k)\}(x) &= T_+(x), \\ S_{0, -1/2}\{\psi_+(k)\}(x) &= U_+(x) \end{aligned} \quad (4.74)$$

причем, очевидно,

$$u_+(x) = U_+(x), \quad \sigma_+(x) = \frac{2A}{x} T_+(x) \quad (4.75)$$

Решение парных уравнений (4.73) ищем в виде

$$\psi_+(k) = S_{-\frac{1}{2}, 1}\{h_+(z)\}(k), \quad (4.76)$$

Подставляя (4.76) в (4.74), после простых преобразований получаем

$$S_{-\frac{1}{2}} h_+ = T_+; \quad K_{0,1/2} h_+ = U_+, \quad (4.77)$$

Обращая соотношения (4.77), находим

$$h_+ = I_{-1, \frac{1}{2}} T_+; \quad h_+ = K_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} U_+, \quad (4.78)$$

Снова вводя интервалы  $z_1$  и  $z_2$ , заметим, что нам неизвестны следующие величины

$$U_+^{(2)} = 0; \quad T_+^{(1)} = q_+, \quad (4.79)$$

Распишем второе из равенств (4.78) по интервалам:

$$\begin{aligned} h_+^{(1)}(z) &= \begin{bmatrix} l \\ z \end{bmatrix} K_{1/2, -1/2} U_+^{(1)} + \begin{bmatrix} \infty \\ l \end{bmatrix} K_{1/2, -1/2} U_-^{(2)} && \text{на } z_1 \\ h_+^{(2)}(z) &= \begin{bmatrix} \infty \\ z \end{bmatrix} K_{1/2, -1/2} U_-^{(2)} && \text{на } z_2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Откуда, с учетом первого равенства (4.79), получаем

$$h_+^{(2)}(z) = 0; \quad h_+^{(1)}(z) = \begin{bmatrix} l \\ z \end{bmatrix} K_{1/2, -1/2} U_+^{(1)}. \quad (4.81)$$

Теперь распишем по интервалам первое из равенств (4.78):

$$\begin{aligned} h_+^{(1)}(z) &= \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} T_+^{(1)} && \text{на } z_1 \\ 0 &= \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} T_+^{(1)} + \begin{bmatrix} z \\ l \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} T_+^{(2)} && \text{на } z_2 \end{aligned} \quad (4.82)$$

откуда, с учетом второго из равенств (4.79), получаем

$$\begin{aligned} h_+^{(1)}(z) &= \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} q_+, \\ \begin{bmatrix} z \\ l \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} T_+^{(2)} &= - \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} q_+. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Обращая второе из соотношений (4.83), находим

$$T_+^{(2)}(z) = \begin{bmatrix} x \\ l \end{bmatrix} I_{-1/2, -1/2} \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix} I_{-1, \frac{1}{2}} q_+. \quad (4.84)$$

Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} l \\ 0 \end{matrix} \right] I_{-1, \frac{1}{2}} q_+ &= \frac{2z}{\pi^{1/2}} \int_0^l \frac{q_+(u) du}{u(z^2 - u^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{z}{\pi^{1/2} A} \int_0^l \frac{p_+(u) du}{(z^2 - u^2)^{1/2}} = \frac{z}{2\pi^{1/2} A (z^2 - \xi^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

что справедливо при  $\xi < > 0$ .

Подставляя (4.85) в (4.84), после некоторых вычислений получаем

$$\begin{aligned} T_+^{(2)}(x) &= -\frac{x}{2\pi A} \frac{d}{dx} \int_l^x \frac{z dz}{(x^2 - z^2)^{1/2} (z^2 - \xi^2)^{1/2}} = \\ &= -\frac{x^2 (l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi A (x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sigma_{yy}^*(x, 0) = \frac{x^2 (l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi (x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x. \quad (4.86)$$

Складывая (4.63) и (4.86), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= \sigma_{yy}^+(x, 0) + \sigma_{yy}^-(x, 0) = \\ &= \frac{(l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \cdot \frac{(x + \xi)}{(x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x. \end{aligned} \quad (4.87)$$

В силу нечетности функции  $\sigma_{yy}^-(x, 0)$  и четности функции  $\sigma_{yy}^+(x, 0)$ , на основании (4.63) и (4.68) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^-(x) &= \frac{\xi (l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi (x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x \\ \sigma_{yy}^+(x) &= \frac{|x| (l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi (x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Складывая соотношения (4.88), получаем

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{(l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \cdot \frac{|x| + \xi}{(x^2 - \xi^2) (x^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x \quad (4.89)$$

Далее с помощью (4.87) и (4.89) вычисляем коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_1^\infty(l) = \lim_{x \rightarrow l+0} [2(x-l)]^{1/2} \sigma_{yy}(x, 0) = \frac{1}{\pi l^{1/2}} \left[ \frac{l+\xi}{l-\xi} \right]^{1/2} \quad (4.90)$$

$$K_1^\infty(-l) = \lim_{x \rightarrow -l-0} [2|x-l|]^{1/2} \sigma_{yy}(x, 0) = \frac{1}{\pi l^{1/2}} \left[ \frac{l-\xi}{l+\xi} \right]^{1/2},$$

что совпадает с известным результатом [123]. Значок " $\infty$ " указывает, что величина  $K_1$  определяется для трещины в бесконечной плоскости.

С учетом соотношений (4.90), представления (4.87) и (4.89) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= K_1^\infty(l) l^{\frac{1}{2}} (l-\xi) \frac{x+\xi}{(x^2-\xi^2)(x^2-l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= K_1^\infty(-l) l^{\frac{1}{2}} (l+\xi) \frac{|x|-\xi}{(x^2-\xi^2)(x^2-l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } x \leq -l \end{aligned} \quad (4.91)$$

Перейдем теперь к построению весовой функции для трещины в полосе конечной ширины (рис. 4.7). Для этого воспользуемся приближенным методом, предложенным в [15]. В соответствии с указанным методом считаем, что приближенные представления для нормальных напряжений на отрезках  $l \leq x \leq c_d$  и  $-b_d \leq x \leq -l$  можно получить из представлений (4.91) с помощью замены  $K_1^\infty$  на пока неизвестные значения коэффициентов интенсивности напряжений для полосы.

Таким образом, полагаем

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0) &= K_1(l) l^{\frac{1}{2}} (l-\xi) \frac{x+\xi}{(x^2-\xi^2)(x^2-l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } l \leq x \leq c_d \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= K_1(-l) l^{\frac{1}{2}} (l+\xi) \frac{|x|-\xi}{(x^2-\xi^2)(x^2-l^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{при } -b_d \leq x \leq -l \end{aligned} \quad (4.92)$$

где  $K_1(l)$  и  $K_1(-l)$  – неизвестные пока значения коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещины.

Представим уравнения (4.92) в следующем виде:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{K_1(l)(l-\xi)}{2l^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(x+l)^{\frac{1}{2}}}{(x-\xi)(x-l)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$-\frac{(l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi l} \cdot \frac{(x + l)^{\frac{1}{2}}}{(x - \xi)(x - l)^{\frac{1}{2}}}, \quad l \leq x \leq c_d. \quad (4.93)$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{K_1(-l)(l + \xi)}{2l^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(|x| + l)^{\frac{1}{2}}}{(|x| + \xi)(|x| - l)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$-\frac{(l^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi l} \cdot \frac{(|x| - l)^{\frac{1}{2}}}{(|x| + \xi)(|x| + l)^{\frac{1}{2}}}, \quad -b_d \leq x \leq -l$$

Для определения величин  $K_1(l)$  и  $K_1(-l)$  мысленно рассечем пластину вдоль оси  $Ox$  и составим уравнения равновесия каждой из получающихся при этом областей. Очевидно, что в данном случае уравнения равенства нулю главного вектора и главного момента относительно оси  $Oy$  имеют вид:

$$\int_{-b_d}^{-l} \sigma_{yy}(x, 0) dx +$$

$$+ \int_l^{c_d} \sigma_{yy}(x, 0) dx = 1, \quad (4.94)$$

$$\int_l^{c_d} \sigma_{yy}(x, 0) dx - \xi =$$

$$\int_{-b_d}^{-l} \sigma_{yy}(x, 0) |x| dx.$$

Подставляя в (4.94) представления (4.93) и вычисляя получающиеся при этом интегралы, находим, что искомые величины  $K_1(l)$  и  $K_1(-l)$  являются решением следующей системы из двух линейных алгебраических уравнений:

$$b_{11} \frac{(l - \xi)^{1/2}}{2l^{1/2}} \cdot K_1(l) + b_{12} \frac{(l + \xi)^{\frac{1}{2}}}{2l^{\frac{1}{2}}} \cdot K_1(-l) = a_{13}, \quad (4.95)$$

$$b_{21} \frac{(l - \xi)^{1/2}}{2l^{1/2}} \cdot K_1(l) - b_{22} \frac{(l + \xi)^{\frac{1}{2}}}{2l^{\frac{1}{2}}} \cdot K_1(-l) = a_{23},$$

где

$$b_{11} = (l - \xi)^{1/2} \ln \frac{(c_d^2 - l^2)^{1/2} + c_d}{l} +$$

$$+ (l + \xi)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi c_d}{(c_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}}, \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}
b_{12} &= (l + \xi)^{1/2} \ln \frac{(b_d^2 - l^2)^{1/2} + b_d}{l} + \\
&+ (l - \xi)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi b_d}{(b_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}}, \\
b_{21} &= (l - \xi)^{1/2} (c_d^2 - l^2)^{1/2} + \\
&+ (l - \xi)^{1/2} (l - \xi) \ln \frac{(c_d^2 - l^2) + c_d}{l} + \\
&+ \xi (l + \xi)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi c_d}{(c_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}}, \\
b_{22} &= (l + \xi)^{1/2} (b_d^2 - l^2)^{1/2} + \\
&+ (l + \xi)^{1/2} (l - \xi) \ln \frac{(b_d^2 - l^2) + b_d}{l} - \\
&- \xi (l - \xi)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi b_d}{(b_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}}, \\
a_{13} &= l + \frac{1}{2\pi l} \left\{ (l^2 - \xi^2)^{1/2} \ln \frac{(c_d^2 - l^2) + c_d}{l} + \right. \\
&+ (l^2 - \xi^2)^{1/2} \ln \frac{(b_d^2 - l^2) + b_d}{l} - \\
&- (l - \xi)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi c_d}{(c_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}} - \\
&\left. - (l + \xi)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi b_d}{(b_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}} \right\}, \\
a_{23} &= \xi + \frac{1}{2\pi l} \left\{ (l^2 - \xi^2)^{1/2} [(c_d^2 - l^2)^{1/2} - (b_d^2 - l^2)^{1/2}] + \right. \\
&+ (l^2 - \xi^2)^{1/2} \left[ (l + \xi) \ln \frac{(b_d^2 - l^2) + b_d}{l} - (l - \xi) \frac{(c_d^2 - l^2) + c_d}{l} \right] - \\
&- \xi (l - \xi) \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - \xi c_d}{(c_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}} - \\
&\left. - \xi (l + \xi) \operatorname{arcctg} \frac{l^2 + \xi b_d}{(b_d^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - \xi^2)^{1/2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Решение системы алгебраических уравнений (4.95) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{K_1(l)(l - \xi)^{1/2}}{2l^{1/2}} &= \frac{a_{13}b_{22} + a_{23}b_{12}}{b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}} \equiv G^+(\xi) \\
\frac{K_1(-l)(l + \xi)^{1/2}}{2l^{1/2}} &= \frac{a_{13}b_{21} - a_{23}b_{11}}{b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}} \equiv G^-(\xi)
\end{aligned} \tag{4.97}$$

где функции  $G^+(\xi)$  и  $G^-(\xi)$  являются регулярными, что проверяется с использованием соотношений (4.96).

Таким образом, получены следующие приближенные представления весовых функций для нецентральной трещины в полосе:

$$K_1(l; \xi) = \frac{2l^{\frac{1}{2}}G^+(\xi)}{(l - \xi)^{\frac{1}{2}}}; \quad K_1(-l; \xi) = \frac{2l^{\frac{1}{2}}G^-(\xi)}{(l + \xi)^{\frac{1}{2}}}; \quad (4.98)$$

в которых явно указана зависимость весовых функций от координаты  $\zeta$  точки приложения сосредоточенных сил.

Пусть поверхности нецентральной трещины в полосе, показанной на рис. 4.7, находятся под действием самоуравновешенной системы нормальных напряжений  $\sigma(x)$ . В этом случае коэффициенты интенсивности напряжений для правого и левого концов трещины ( $k^+$  и  $k^-$  соответственно) определяются с помощью весовых функций (3.98) следующим образом:

$$k^+ = \int_{-l}^l K_1(l; \xi) \sigma(\xi) d\xi = 2l^{\frac{1}{2}} \int_{-l}^l \frac{G^+(\xi)\sigma(\xi)d\xi}{(l - \xi)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.99)$$

$$k^- = \int_{-l}^l K_1(-l; \xi) \sigma(\xi) d\xi = 2l^{\frac{1}{2}} \int_{-l}^l \frac{G^-(\xi)\sigma(\xi)d\xi}{(l + \xi)^{\frac{1}{2}}},$$

Переходя в (4.99) к новой переменной интегрирования  $X = \xi/l$ , получаем следующие представления для коэффициентов интенсивности напряжений:

$$k^+ = 2l \int_{-1}^1 \frac{G_*^+(X)\sigma(lX)dX}{(l - X)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.100)$$

$$k^- = 2l \int_{-1}^1 \frac{G_*^-(X)\sigma(lX)dX}{(l + X)^{\frac{1}{2}}},$$

в которых

$$G_*^+(X) = \frac{a_{13}^*b_{22}^* + a_{23}^*b_{12}^*}{b_{11}^*b_{22}^* + b_{12}^*b_{21}^*}; \quad G_*^-(X) = \frac{a_{13}^*b_{21}^* - a_{23}^*b_{11}^*}{b_{11}^*b_{22}^* + b_{12}^*b_{21}^*} \quad (4.101)$$

и, в свою очередь

$$\begin{aligned}
b_{11}^* &= (l - X)^{1/2} \ln \frac{(C^2 - l^2)^{1/2} + C}{l} + \\
&+ (l + X)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - XC}{(C - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}}, \\
b_{12}^* &= (l + X)^{1/2} \ln [(B^2 - l^2)^{1/2} + B] + \\
&(l - X)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 + XB}{(B^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}}, \\
b_{21}^* &= (1 - X)^{1/2} \left\{ (C^2 - l^2)^{1/2} + (l - X) \ln [(B^2 - l^2)^{1/2} + B] \right\} \\
&+ X(l + X)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - XC}{(C - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}}, \\
b_{22}^* &= (l + X)^{1/2} \left\{ (B^2 - l^2)^{1/2} + (l - X) \ln [(B^2 - l^2)^{1/2} + B] \right\} \\
&+ X(l - X)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 + XB}{(B^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}}, \\
a_{13}^* &= l + \frac{1}{2\pi l} \left\{ (l - X^2)^{1/2} \ln \left[ (C^2 - l^2)^{1/2} + C \right] + \right. \\
&\left. + (l + X^2)^{1/2} \ln \left[ (B^2 - l^2)^{1/2} + B \right] - \right. \\
&\left. - (l - X)^{1/2} \operatorname{arcctg} \frac{l^2 + XB}{(B^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}} \right\}, \\
a_{23}^* &= X + \frac{l}{2\pi} \left\{ [(l - X^2)^{1/2} - (B^2 - l^2)^{1/2}] + \right. \\
&(l + X) \ln \left[ (B^2 - l^2)^{1/2} + B \right] - (l - X) \ln \left[ (C^2 - l^2)^{1/2} + C \right] - \\
&- X(l - X) \operatorname{arcctg} \frac{l^2 - XC}{(C^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}} - \\
&\left. - X(l + X) \operatorname{arcctg} \frac{l^2 + XB}{(B^2 - l^2)^{1/2} (l^2 - X^2)^{1/2}} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

где использованы обозначения

$$C = \frac{c_d}{l}; B = \frac{b_d}{l} \tag{4.103}$$

Таким образом, определение коэффициентов интенсивности напряжений для центральной трещины в полосе, нагруженной произвольной системой нормальных нагрузок, сводится к вычислению интегралов из (4.100).

Переходим теперь к решению задачи, показанной на рис. 4.6, которое является приближенным решением исходной задачи, показанной на рис. 4.5.

Решение задачи, показанной на рис. 4.6, будем строить следующим образом.

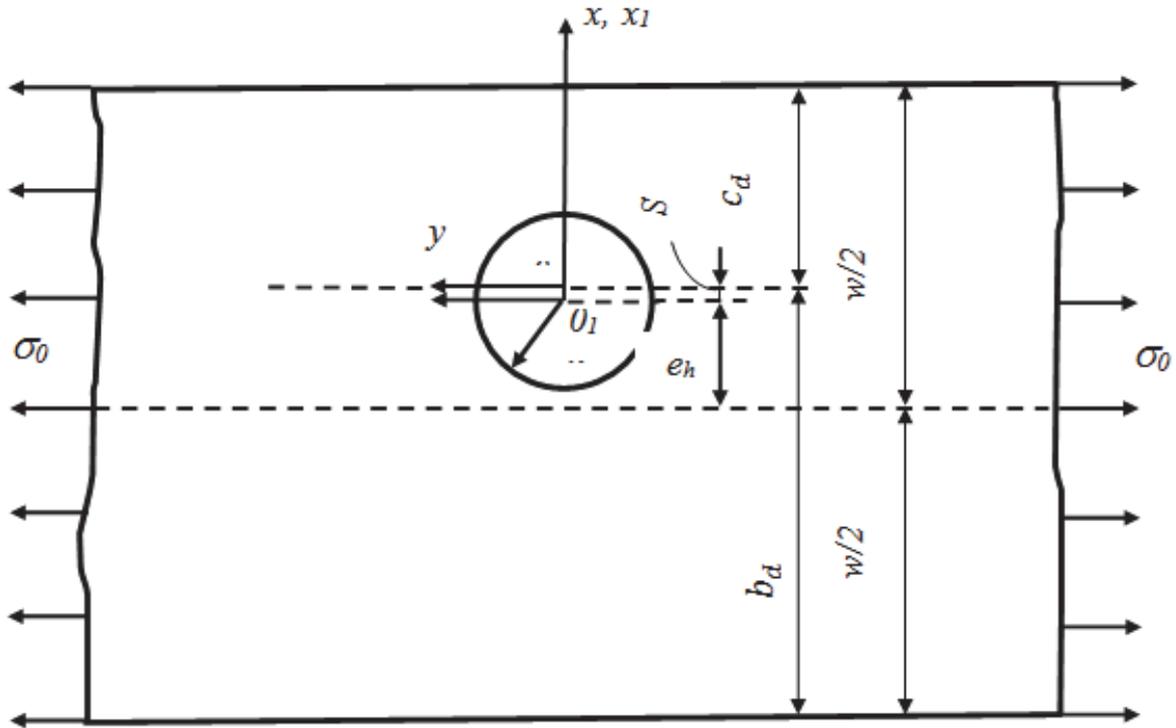


Рис. 4.8. Пластина с нецентральной круговым отверстием

Сначала будем считать, что радиальные трещины отсутствуют (рис. 4.8), а распределение нормальных напряжений вдоль отрезков прямых, определяющих положение радиальных трещин, вычисляются из системы (4.18).

Далее рассмотрим задачу об "эквивалентной" трещине в пластине без кругового отверстия, нагруженной напряжениями

$$\sigma_m(x_1) = \sigma_0 \left( \varepsilon_{0m} + \varepsilon_{1m} \frac{R^2}{x_1^2} + \varepsilon_{2m} \frac{R^4}{x_1^4} \right) \text{ при } -b_d < x_1 \leq -R$$

$$\sigma_p(x_1) = \sigma_0 \left( \varepsilon_{0p} + \varepsilon_{1p} \frac{R^2}{x_1^2} + \varepsilon_{2p} \frac{R^4}{x_1^4} \right) \text{ при } R < x_1 \leq c_d$$

на участках, совпадающих с радиальными трещинами (рис. 4.6). Коэффициенты  $\varepsilon_{0m}, \dots, \varepsilon_{2p}$  в формулах для напряжений  $\sigma_m(x_1)$  и  $\sigma_p(x_1)$  находятся из решения системы уравнений (4.18).

Решение задачи (рис. 4.6) может быть получено с использованием весовых функций, построенных ранее, и определяется формулами (4.100). Причем от переменной  $x_1$  следует перейти к переменной  $x$ . В результате перехода к переменной  $x$  получаем следующие представления для напряжений  $\sigma_m$  и  $\sigma_p$ , задаваемых на поверхностях "эквивалентной" трещины:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_m(x_1) = \sigma_0 \left( \varepsilon_{0m} + \varepsilon_{1m} \frac{R^2}{x+S_1^2} + \varepsilon_{2m} \frac{R^4}{x+S_1^4} \right) & \text{при } l < x \leq -R-s, \\ \sigma_p(x_1) = \sigma_0 \left( \varepsilon_{0p} + \varepsilon_{1p} \frac{R^2}{x+S_1^2} + \varepsilon_{2p} \frac{R^4}{x+S_1^4} \right) & \text{при } R-s < x_1 \leq 1. \end{cases} \quad (4.104)$$

Подставляя напряжения (4.104) в формулы (4.100), приходим к следующим представлениям для коэффициентов интенсивности напряжений для задачи, показанной на рис. 4.7:

$$k^+ = 2l^{1/2} \left\{ \int_{-l}^{-r_m} \frac{G_*^+(X) \sigma_m(lX) dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} + \int_{r_p}^l \frac{G_*^+(X) \sigma_p(lX) dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad (4.105)$$

$$k^- = 2l^{1/2} \left\{ \int_{-l}^{-r_m} \frac{G_*^-(X) \sigma_m(lX) dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} + \int_{r_p}^l \frac{G_*^-(X) \sigma_p(lX) dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

где безразмерные постоянные  $r_m$  и  $r_p$  имеют вид:

$$r_m = \frac{R+s}{l}; \quad r_p = \frac{R-s}{l} \quad (4.106)$$

Теперь, чтобы перейти от решения задачи, показанной на рис. 4.7, которое определяется формулами (4.105), к решению задачи, показанной на рис. 4.6, воспользуемся поправочными коэффициентами  $h_m$  и  $h_p$ . Необходимость введения указанных поправочных коэффициентов вызвана тем, что в формулах (4.105) наличие кругового отверстия учитывается лишь через величину напряжений  $\sigma_m$  и  $\sigma_p$ , прикладываемых к поверхностям “эквивалентной” трещины.

Для определения поправочных коэффициентов  $h_m$  и  $h_p$  рассмотрим частный случай, показанной на рис. 4.6, когда  $b_d = c_d = \infty$  и  $\alpha_m = \alpha_p$ . Сравнивая приближенное решение задачи, полученное с использованием вышеуказанного подхода, с известным точным решением [123], приходим к следующим выражениям для искомых поправочных коэффициентов:

$$h_m = \frac{1,246 + 4,248l_m}{1 + 4,248l_m}; \quad h_p = \frac{1,246 + 4,248h_p}{1 + 4,248l_p}, \quad (4.107)$$

в которых

$$l_m = \frac{\alpha_m}{R}; \quad l_p = \frac{\alpha_p}{R}; \quad (4.108)$$

Таким образом, приближенное решение исходной задачи, показанной на рис. 4.6, имеет вид:

$$k^+ = 2l^{1/2}h_m \left\{ \int_{-l}^{-r_m} \frac{G_*^+(X)\sigma_m(lX)dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} + \int_{r_p}^l \frac{G_*^+(X)\sigma_p(lX)dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} \right\},$$

$$k^- = 2l^{1/2}h_p \left\{ \int_{-l}^{-r_m} \frac{G_*^-(X)\sigma_m(lX)dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} + \int_{r_p}^l \frac{G_*^-(X)\sigma_p(lX)dX}{(l-X)^{\frac{1}{2}}} \right\},$$
(4.109)

Все входящие в правые части соотношений (4.109) функции и постоянные известны и определены выше. Поэтому вычисление коэффициентов интенсивности напряжений по формулам (4.109) сводится к вычислению определенных интегралов с использованием квадратурных формул.

#### 4.4. Теоретическое и экспериментальное исследование предельного состояния пластины с двумя отверстиями

В качестве примера рассмотрим пластину конечной ширины ( $2W = 120$  мм,  $2H = 400$  мм,  $t = 1,34$  мм), ослабленную двумя симметрично расположенными отверстиями и подвергающуюся равномерному растяжению (рис. 4.1). При этом радиус отверстий принимает значения 7 и 10 мм, расстояния между кромками отверстий  $2(B-R)$  равны 14, 21, 28 мм и 20, 30, 40 мм соответственно для каждого радиуса. Материал пластины Д16АТ имеет следующие механические характеристики: истинное сопротивление отрыву  $S_k = 700$  МПа, предел прочности  $\sigma_B = 440$  МПа, вязкость разрушения  $K_c = 32,1$  МПа·м<sup>1/2</sup>.

За критерий прочности сплошного материала принят критерий (2.1). В качестве условия разрушения используем условие Ирвина (2.2).

По предложенным выше методикам определения напряженного состояния пластины с двумя отверстиями и вычисления КИН в полосе с двумя отверстиями и четырьмя радиальными трещинами составлены программы расчета на ЭВМ. В результате численного расчета напряженно-деформированного состояния определяются нормальные напряжения на площадках в сечении  $y = 0$  (рис. 4.1). Затем, с использованием формул (4.109), вычисляются КИН в кончиках радиальных трещин, выходящих на контур отверстия в полосе (рис. 4.6).

На рис. 4.9 построены кривые I – IV зависимости КИН в кончике радиальной трещины от напряжения  $\sigma_0$ , приложенного к граням пластины с отверстиями диаметром  $D = 10$  мм и расстоянием между кромками вырезов  $2(B-R) = 20$  мм. Кривые I и II построены для правой радиальной трещины (рис. 4.6) при использовании критериев  $\sigma_{экр} > \sigma_B$  и  $\sigma_I > S_k$  соответственно. Зависимости III и IV построены для левой радиальной трещины с использованием тех же критериев. Горизонтальная прямая, проведенная на уровне  $K_c = 31,2$  МПа·м<sup>1/2</sup>, дает точки пересечения 1–4, абсциссы которых

определяют значения предельных напряжений  $\sigma_0$ . Естественно, что самое минимальное напряжение  $\sigma_0 = 275$  МПа из четырех найденных будет являться критическим для рассматриваемой пластины.

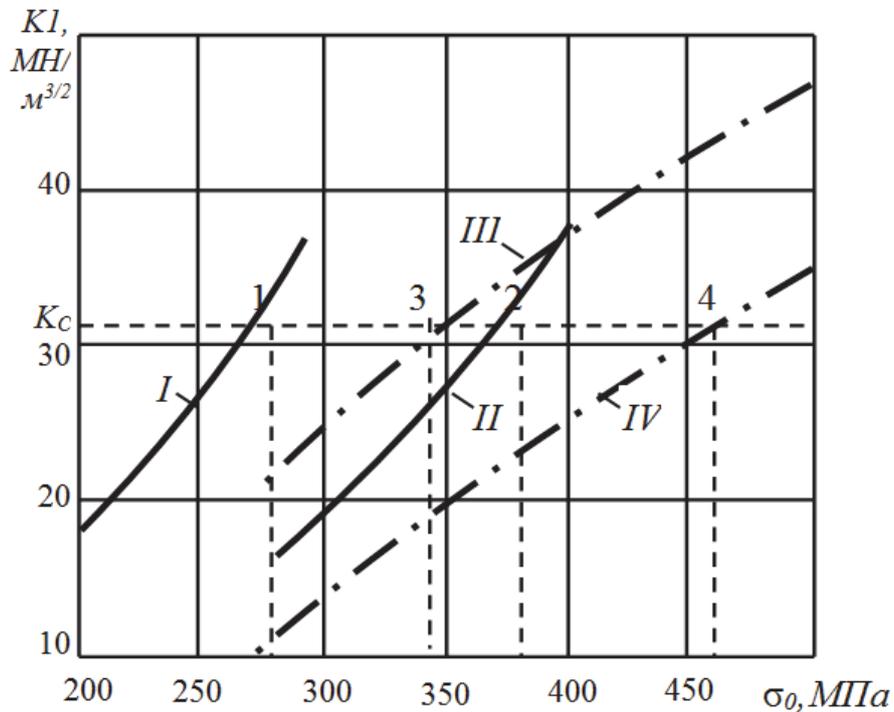


Рис. 4.9. Зависимость КИН  $K_I$  от напряжения  $\sigma_0$

На рис. 4.10 представлены теоретические данные (кривые 1 и 4) расчета предельного состояния пластины с различными диаметрами отверстий и различным удалением отверстий друг от друга.

С целью проверки предложенного способа определения предельного состояния пластины с двумя отверстиями были проведены испытания образцов с геометрическими размерами и механическими характеристиками, указанными выше. Было испытано 30 образцов с двумя значениями диаметров отверстий (7 и 10 мм) и тремя различными расстояниями между кромками отверстий на каждый диаметр отверстия. Таким образом, было использовано по 5 образцов на одну точку. На рис. 4.10 также представлены результаты эксперимента (заштрихованные области).

Теоретические кривые 1–4, построенные по двум критериям прочности, дали двухстороннюю оценку параметров предельного состояния. Наибольшая разница теоретических и экспериментальных данных не превысила 12% при использовании критерия  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$ . При применении критерия  $\sigma_I \geq S_k$  погрешность теоретического метода ниже.

Теоретические кривые 1 и 3 построены по значениям критических напряжений  $\sigma_0^{(1)} = \sigma_k$  при использовании критерия  $\sigma_I \geq S_k$ , а зависимости 2 и

4 – по напряжениям  $\sigma_0^{(2)} = \sigma_k$ , применяя критерий  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$ . Если подсчитать среднеарифметические значения напряжений  $\sigma_0^{(1)}$  и  $\sigma_0^{(2)}$ , то они расположатся в области экспериментальных данных (пунктирная и штрихпунктирная линии на рис. 4.10).

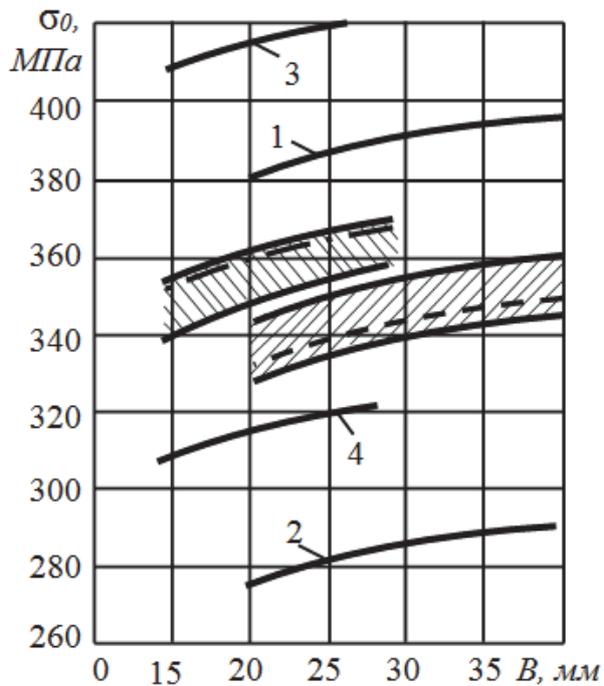


Рис. 4.10. Зависимость критического напряжения  $\sigma_{0k}$  от расстояния между кромками отверстий  $B$ : *штриховка вправо* – доверительная область экспериментальных данных для пластин с отверстиями диаметром  $D = 10$  мм; *штриховка влево* – то же для  $D = 7$  мм; 1 и 2 – кривые, построенные с использованием предложенного способа (по критериям  $\sigma_I \geq S_k$  и  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$  соответственной для пластин с отверстиями диаметром  $D = 10$  мм; 3 и 4 – то же для  $D = 7$  мм; *штрихпунктирная линия* – расчетные данные для совместного использования двух критериев  $\sigma_I \geq S_k$  и  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$  для пластины с отверстиями  $D = 7$  мм; *пунктирная линия* – то же для  $D = 10$  мм

#### 4.5. Заключение по разделу 4

1. Предложенный теоретический способ определения предельного состояния конструктивных элементов (см. р. 2) распространен на случай наличия нескольких отверстий.

2. Разработан численный метод определения напряженного состояния пластин с несколькими отверстиями, который является развитием метода суперпозиции сингулярных решений. Решена конкретная задача по определению коэффициентов концентрации напряжений в пластине с двумя отверстиями одинакового диаметра при различном удалении их друг от друга.

3. Разработан приближенный теоретический способ определения коэффициентов интенсивности напряжений в пластине с двумя отверстиями и четырьмя радиальными трещинами.

4. Выполнены расчеты предельного состояния пластины конечной ширины при наличии двух круговых отверстий и произведена экспериментальная проверка предложенного теоретического способа. Разница между теоретическими и экспериментальными значениями предельных нагрузок для пластин с двумя вырезами не превышает 5%. при использовании в вычислениях двух критериев прочности механики сплошных сред.

## **5. ПРОЧНОСТЬ ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВЫРЕЗОМ**

Во второй и третьей главах монографии предложен способ определения предельного состояния элементов конструкций, изготовленных из изотропного материала при наличии нетрещиноподобных дефектов. Ниже рассмотрено применение предложенного способа для расчета ослабленных отверстием конструктивных элементов, материал которых является композиционным.

Использование композиционных материалов (КМ) в силовых элементах конструкций наземного и воздушного транспорта позволяет повысить их весовую эффективность, благодаря высокой удельной прочности КМ. Однако при проектировании транспортной техники из высокопрочного КМ следует учитывать тот факт, что он обладает повышенной чувствительностью к ударным повреждениям.

### **5.1. Современные методы определения предельного состояния композиционных материалов**

Критерии прочности или предельного состояния материала характеризуют начальные проявления процесса его разрушения, например текучесть в зоне концентрации напряжений, предшествующую процессу разрушения. «Критерии предельного состояния для данного материала представляет собой, по существу, эмпирическую формулировку процесса выхода из строя или потери материалом несущей способности» [64].

При расчете на прочность КМ можно выделить два основных научных направления в этой области: исследование с позиций макромеханики или с позиций микромеханики. При использовании первого подхода (феноменологического) состояние разрушения определяется изменением макроповедения конструкций и обусловлено потерей устойчивости или исчерпыванию ее прочности. При втором подходе (микрподходе) разрушение элементов конструкций сопровождается нарушением поверхности раздела волокно-матрица. «Состояние разрушения наступает, когда около одного или группы микродефектов напряжения в волокне или матрице превышены соответствующие предельные значения» [38]. Чрезвычайно полезные результаты можно получить и при разумном сочетании этих двух подходов для теории слоистых пластин.

Наиболее рациональным, с точки зрения инженерного понимания процесса разрушения на макро- и микро-уровне и описания свойств материала, из двух представленных выше подходов является феноменологический. При этом подходе «неоднородный композит рассматривается как

сплошная среда, математическая модель которой строится на основе экспериментально полученных данных без объяснения механизмов, определяющих поведение КМ» [62]. Критерии предельного состояния не выводятся, они устанавливаются или постулируются на основе собственных опытов и доступных данных других исследователей в этом направлении исследований. Затем сформулированные критерии проверяются в различных экспериментах или условиях эксплуатации.

В наиболее простых критериях предельного состояния [37,6] учитывается возможность реализации нескольких механизмов разрушения при плоском напряженном состоянии. Эти критерии основываются на гипотезе, согласно которой, виды разрушения взаимно независимы и разрушение наступает в случае достижения предельных значений напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , и  $\tau_2$  по отдельности. Данный критерий максимальных напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \pm F_1^- &\leq \sigma_1 \leq F_1^+; \\ -F_2^- &\leq \sigma_2 \leq F_2^+; \\ |\tau_{12}| &\leq F_{12}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $F$  – соответствующие пределы прочности; знаки “+” и “–” в индексах означают соответственно растяжение и сжатие [37,65].

Эксперименты, проведенные с полимерным КМ (ПКМ), позволили прийти к выводу, что в зависимости от вида напряженного состояния могут реализовываться принципиально различные механизмы разрушения материалов: расслоение материала, разрыв волокон, разрушение связующего, потеря устойчивости волокон и т.д. Поэтому критерии прочности по формулам (5.1) могут применяться лишь для первоначальной приближенной оценки прочности ПКМ, т.к. являются слишком упрощенными при оценке прочности анизотропных материалов для плоского напряженно-деформированного состояния. Разрушение материала обычно связано с его напряженным состоянием, которое определяется компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ). В связи с этим любой феноменологический критерий прочности может быть записан в общем виде таким образом:

$$f(\sigma_{ij}, F) = 0, \quad (5.2)$$

где  $F$  – некоторые характеристики прочности материала.

Критерии прочности типа (5.2) «призваны обеспечить интерполяцию данных некоторых базовых экспериментов по определению прочностных характеристик материала на случай напряженного состояния произвольного вида» [6]. Геометрически критерий разрушения можно интерпретировать как некоторую предельную поверхность в пространстве напряжений. При этом условие разрушения выполняется в момент пересечения этой поверхности прочности заданным вектором напряжений. Поэтому механиче-

ское разрушение можно интерпретировать как любое наблюдаемое изменение механического поведения, вызванного механическим воздействием (напряжением, деформацией или работой). При отсутствии других внешних воздействий (химических, тепловых и т.д.) критерий разрушения можно дополнительно к (5.2) записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_{ij}, G) &= 0, \\ h(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, H) &= 0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где  $G, H$  – некоторые характеристики материала, связанные, соответственно с деформацией и совершаемой работой.

Фундаментальный обзор по феноменологическим критериям для анизотропных тел представлен в работе Ву “Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред” [62]. В работе описаны, обобщены и критически проанализированы большинство из наиболее известных и применяемых критериев разрушения. Анализ опирается на многочисленные экспериментальные результаты автора, а также на отобранные и систематизированные данные из работ других авторов. Также важным является то, что в работе приведено сравнение точности оценки прочности КМ с помощью различных критериев [62].

Самым простым обобщением изотропного критерия предельного состояния для условий анизотропии является предложенный Хиллом обобщенный критерий Мизеса [37]

$$\begin{aligned} F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \\ + 2L\sigma_4^2 + 2M\sigma_5^2 + 2N\sigma_6^2 = 1, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где использованы матричные обозначения ( $\sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$ ), константы  $F, \dots, N$  должны вычисляться из экспериментальных данных, относящихся к предельному состоянию материала при различных сочетаниях действующих напряжений. Для изотропии  $F=G=H=L=M=N$ , выражение (5.4), записанное только через главные напряжения, приобретает известную форму критерия Мизеса. В этом обобщении критерия Мизеса предполагается независимость наступления предельного состояния от гидростатических напряжений, а также отсутствие различия между состояниями растяжения и сжатия. Известно, что оба этих эффекта важны при оценке поведения КМ [37]. Поэтому очевидна необходимость применения более общего критерия предельного состояния.

Наиболее перспективным является подход, основанный на записи критерия через скалярные функции от компонент тензора напряжений, которые можно преобразовать в виде полинома. Поэтому для анизотропных КМ самое широкое распространение получили тензорно-полиномиальные

формы записи критериев прочности, которые в предложенном Ву виде записываются так [62]:

$$f(\sigma_i) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1, (i, j, k = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.5)$$

где  $F_i, F_{ij}, F_{ijk}$  – матричные обозначения тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов.

Компоненты тензоров поверхности прочности по напряжениям  $F_i$  и  $F_{ij}$  можно выразить через технические пределы прочности, которые в принятых в [62] и [5] обозначениях записываются с помощью компонент  $X_1, X'_1, X_2, X'_2$  – пределы прочности при растяжении и сжатии в направлениях 1 и 2 соответственно и компонент  $X_6, X'_6$  – пределы прочности при сдвиге в двух противоположных направлениях в плоскости (5.2).

Для ортотропного материала  $X_6 = X'_6$ .

В работе [37] показано, что критерий Мизеса-Хила (5.4), представляет собой вырожденный случай тензорно-полиномиальной формулировки в напряжениях (5.5), когда не учитывается влияние гидростатического давления.

С учетом перечисленных пределов прочности критерий Мизеса-Хила может быть записан в виде

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} - \left( \frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{X_2^2} + \frac{1}{X_3^2} \right) \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \frac{\sigma_6^2}{X_6^2} = 1. \quad (5.6)$$

Для КМ, обладающего трансверсальной изотропией прочностных свойств, т.е. в случае, когда  $X_2 = X_3$ , уравнение (5.6) можно привести в наиболее употребительной его форме

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \frac{\sigma_6^2}{X_6^2} = 1.$$

Большой вклад в исследование явления разрушения анизотропных сред внесли работы Ашкенази с соавторами [5,6]. Наибольшее различие между тензорно-полиномиальной формулировкой Цая-Ву (5.5) и критерием, предложенным Ашкенази, состоит в определении в нем параметров прочности (в сокращенных обозначениях) так:

$$a_{ij} = 1/\tilde{\sigma}_{ij},$$

где  $\tilde{\sigma}_{ij}$  – тензор пределов прочности материала.

Для случая обобщенного плоского напряженного состояния критерий разрушения, который предложила Ашкенази, можно записать в виде [62]:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \gamma \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{X_6^2} \right)^2 + \\ & + I_2 \left[ \left( \lambda - \frac{2}{X_1 X_6} \right) \sigma_1^2 + \left( \mu - \frac{2}{X_2 X_6} \right) \sigma_2^2 \right] + \\ & + I_2 \left[ \sigma_1 \sigma_2 \left( \lambda + \mu - \frac{1}{X_1 X_6} - \frac{1}{X_2 X_6} \right) - \rho I_1 \right] = I_1^2 + I_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

В этой формуле  $\lambda, \mu, \rho$  дополнительные экспериментальноопределяемые постоянные, кроме того

$$\gamma = \left( \frac{4}{X_1^{45^0}} - \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} - \frac{1}{X_6} \right),$$

где  $X_1^{45^0}$  – предел текучести при растяжении под углом 45 к направлению главных осей симметрии. Инварианты напряжений  $I_1$  и  $I_2$  определяется так:

$$2I_1 = \sigma_1 + \sigma_2; \quad 2I_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + 2\tau_{12}^2.$$

Позднее Ашкенази и Пеккер предложили упрощенный вариант уравнения (5.7), а именно

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \gamma \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{X_6^2} \right)^2 = \\ & = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_6^2 = I_1^2 + I_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Одним из основных недостатков критериев (5.7) и (5.8), которые отмечены в работе Ву[37] является их справедливость лишь для  $(\sigma_1 + \sigma_2) \geq 0$ ; если же  $(\sigma_1 + \sigma_2) < 0$ , то предел прочности при растяжении следует заменить пределом прочности при сжатии.

Для ортогонально армированных пластиков в работе [168] предложена еще более упрощенная форма записи для критериев прочности материала в плоскостях  $(n_1, n_2)$  возможного разрушения:

$$\begin{aligned} \sigma_{n1} + m_1 \tau_{n1} &= \sigma(0^0) = c_1, \\ \sigma_{n2} + m_2 \tau_{n2} &= \sigma(90^0) = c_2. \end{aligned}$$

Критерий разрушения, предложенный Гольденблатом и Копновым [159], можно записать в виде:

$$(F_i \sigma_i)^\alpha + (F_{ij} \sigma_i \sigma_j)^\beta + (F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k)^\gamma + \dots = 1, \quad (5.9)$$

где  $F_i, F_{ij}, F_{ijk}, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$  – постоянные определяемые из экспериментов. Предполагает, что общность уравнения (5.9) не превышает общности формулировки (1.5), поскольку эффект введения постоянных  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  может быть перекрыт путем использования полиномов достаточно высокого порядка [37].

Поскольку для большинства КМ существует различие между прочностью при растяжении и сжатии, то для оценки прочности ортотропного материала можно использовать критерий Хоффмана, который записывается так [9]:

$$\frac{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2}{X_1 X_1'} + \frac{\sigma_2^2}{X_2 X_2'} + \frac{X_1' - X_1}{X_1 X_1'} \sigma_1 + \frac{X_2' - X_2}{X_2 X_2'} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{X_6^2} = 1.$$

Для условий плоского напряженного состояния ортотропного КМ Яценко [168] получил следующий критерий прочности; при условии, что  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$  и  $\sigma_6 = \tau_{12} = 0$

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \left[ \frac{1}{X_1^2} + \frac{1}{(X_2')^2} - \frac{1}{X_{6,45}^2} \right] \sigma_1 \sigma_2 = 1,$$

где  $X_{6,45}^2$  – предел прочности при сдвиге ортотропного КМ в диагональном направлении.

Частными формами наиболее общего тензорного полинома (5.5) представляются две группы критериев прочности:

- 1) содержащие первые и вторые степени компонентов тензора напряжений;
- 2) содержащие только вторые и четвертые степени этих компонент.

Различие в поведении анизотропных тел при растяжении и при сжатии учитываются в этих двух группах критериев по-разному. В первую группу компоненты напряжений подставляются с их знаками (“+” – для растяжения и “-” для сжатия). Во второй группе критериев все напряжения подставляются по абсолютной величине, различное сопротивление растяжению и сжатию учитывается способом кусочной аппроксимации [37].

Широкое распространение получил упрощенный квадратный критерий Норриса для плоских напряженных состояний, в частности для плоскости (1,2) при  $\tau_{xy} = 0$  он имеет следующий вид [6]:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_1 X_2} = 1$$

и соответствует поверхности прочности в виде эллипсоида.

Пуло и Эвенсен [193] предложили критерий прочности в тензорной форме для однородных или слоистых анизотропных материалов, введя понятие коэффициента взаимодействия, который для случая плоского напряженного состояния определяется следующим образом:

$$\gamma = \frac{3S^2}{XY},$$

где  $X, Y, S$  – продольные нормальные и касательные напряжения, определяемые относительно общей координатной системы  $x, y$ . Главные оси прочности материала определяются как оси, в которых параметр взаимодействия  $\gamma$  минимален. Для идеального сетчатого материала, не проявляющего эффектов взаимодействия, величина  $\gamma$  приближается к нулю, для изотропного материала, подчиняющегося критерию Мизеса,  $\gamma=1$ .

Пуло и Эвенсен предположили, что при плоском напряженном состоянии разрушение произойдет, когда вектор напряжений достигнет следующих предельных поверхностей:

$$\left(\frac{\sigma_\xi}{\Xi}\right)^2 - \gamma' \frac{\sigma_\xi \sigma_\eta}{\Pi^2} + \gamma' \left(\frac{\sigma_\eta}{\Pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\xi\eta}}{S_{\xi\eta}}\right)^2 = 1$$

для  $\gamma' < 1$ .

$$\gamma' \left(\frac{\sigma_\xi}{\Xi}\right)^2 - \gamma' \frac{\sigma_\xi \sigma_\eta}{\Xi^2} + \gamma' \left(\frac{\sigma_\eta}{\Pi}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\xi\eta}}{S_{\xi\eta}}\right)^2 = 1$$

Подобные выражения существуют и для случая  $\gamma' < 1$ . Коэффициент взаимодействия  $\gamma'$ , определяется относительно главных осей прочности  $\xi, \eta$ , т.е.

$$\gamma' = \frac{3S_{\xi\eta}^2}{\Xi\Pi},$$

где  $\Xi, \Pi, S_{\xi\eta}$  – нормальные и сдвиговые прочности слоистого композита относительно главных осей прочности  $\xi$  и  $\eta$ .

Для описания разрушения анизотропных КМ в некоторых случаях удобно использовать критерии максимальной деформации. Поскольку большинство ПКМ являются достаточно хрупкими, то это приводит к возможности применения модифицированного критерия Сен-Венана (критерия максимальной деформации) к анизотропным материалам. В используемых модификациях данного критерия предполагается, что имеет место ортотропия и включено ограничение на величины деформаций сдвига.

Критерий максимальной деформации может быть записан, по аналогии с (5.5), как

$$G_i \varepsilon_i + G_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j + G_{ijk} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k + \dots = 1, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 6)$$

Здесь  $G_i, G_{ij}$  и т.д. постоянные материала, выражаемые через используемые в технике пределы прочности по деформациям.

Критерии максимальных деформаций можно выразить в напряжениях, используя соответствующую форму соотношений напряжение-деформация. Благодаря своей простоте эти критерии широко используются, однако имеют практическое значение только для одномерных состояний, и необходимо проявлять осторожность при их использовании для многомерных напряженного и деформированного состояний [2].

Подробный анализ применимости различных феноменологических критериев прочности КМ, основанный на экспериментальных исследованиях проведен в фундаментальной работе Ву [37]. Им была предпринята попытка доказать, что практически все предложенные другими авторами феноменологические критерии прочности являются той или иной формой сформулированного им тензорно-полиномиального критерия прочности. Сравнительный анализ показал отсутствие универсального критерия прочности для КМ и необходимость обширных экспериментальных исследований для возможности применения полиномиальных критериев.

**Разрушение слоистого КМ.** В рассмотренных выше феноменологических критериях прочности ПКМ считался квазиоднородным, обладающим осредненными упругими и прочностными характеристиками. При этом прочность характеризовалась как макроскопическое свойство ПКМ безотносительно к свойствам компонентов.

Рассмотрим слоистый композит, составленный из отдельных слоев, уложенных под различными углами. В реальных слоистых КМ связующее начинает разрушаться раньше, чем волокна. Обычно разрушение начинается с растрескивания связующего в отдельном слое и такое явление принято называть *первым разрушением слоя слоистых плит*, Цай и Хан сформулировали критерий первого разрушенного слоя [2]. В современной зарубежной литературе этому соответствует термин *firstplyfailure (FPF)* [121]. Если разрушение слоев описывается функцией предельных деформаций  $g$ :

$$g(e_i) = 1,$$

компоненты  $e_a$ , соответствующие деформации первого разрушенного слоя, определяют из

$$g_{FPF}(e_a) = 1,$$

Здесь функция первого разрушенного слоя определяется следующим образом:

$$g_{FPF}(e_a) = \min\{g(Q_{ia}^n e_a)\},$$

где  $Q_{ia}^n$  – матрица преобразования системы координат  $n$ -го слоя в систему координат слоистого композита. При этом функция  $g_{FPF}$  не зависит от деформационных свойств слоев.

Роуланде в работе [121] использовал критерий предельного состояния. В ней предполагается, что материал слоя является линейно упругий вплоть до разрушения, поэтому предельное состояние наступает при достижении предела текучести. Слой считается разрушенным, когда любая деформация в нем (в направлении волокон, в поперечном направлении или сдвиговая) достигает предельного значения, определенного из эксперимента при одноосном напряженном состоянии. Предельная поверхность слоистого КМ в целом представляет собой внутреннюю огибающую предельных поверхностей всех слоев материала, приведенных к его главным осям.

Подставив в закон Гука для ортотропного слоя экспериментально определенные значения предельных деформаций  $\varepsilon_1^u$ ,  $\varepsilon_2^u$ , получим выражение для критерия наибольших деформаций:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^u \\ \varepsilon_2^u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}$$

для случая  $\tau_{12} = 0$ .

После преобразований имеем

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\varepsilon_1^u}{S_{12}} - \frac{S_{11}}{S_{12}} \sigma_1, \\ \sigma_2 &= \frac{\varepsilon_2^u}{S_{22}} - \frac{S_{12}}{S_{22}} \sigma_1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Уравнения (5.10) описывают прямые линии в координатах  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и определяют достижение предельного состояния ортотропным слоем. Построение предельной поверхности слоистого КМ для плоского напряженного состояния в пространстве  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  осуществляется суперпозицией предельных критериев в координатах  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  при различных значениях  $\tau_{xy}$  [192]. Большинство методов построения предельных поверхностей слоистых КМ предполагают использование линейно упругого подхода при определении напряженного состояния материала. Однако многие из практически используемых видов однонаправленных КМ в действительности деформируются нелинейно при действии касательных напряжений и напряжений, перпендикулярных направлению армирования. В результате и диаграмма деформирования слоистого КМ в целом может оказаться нелинейной.

Петит и Вадоунс [192] распространили традиционный подход теории наибольших деформаций на случай нелинейного поведения материала. Они предложили использовать кусочно-линейную аппроксимацию диаграммы деформирования слоя. Согласно этому методу рассматривается ступенчатое приложение средних напряжений к КМ. Среднее приращение деформации слоистого композита

$$[\Delta\varepsilon]_{n+1} = (\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\gamma_{xy})_{n+1},$$

соответствующее  $(n+1)$ -й ступени нагрузки

$$[\Delta N]_{n+1} = (\Delta N_x, \Delta N_y, \Delta N_{xy})_{n+1},$$

вычисляется в предположении о симметрии КМ при помощи соотношения:

$$[\Delta\varepsilon]_{n+1} = [A]_n^{-1}[\Delta N]_{n+1}, \quad (5.11)$$

где  $[A]_n^{-1}$  – матрица податливости слоистого КМ в конце  $n$ -го приращения нагрузки. Прибавляя вычисленное приращение деформации  $[\Delta\varepsilon]_{n+1}$  к деформации после  $n$  предыдущих ступеней нагружения, получим текущее значение деформаций композита, т.е.

$$[\Delta\varepsilon]_n = [\varepsilon_n] + [\Delta\varepsilon]_{n+1}.$$

Деформация любого слоя  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , и  $\gamma_{12}$  вычисляются через деформации КМ по уравнению

$$\begin{aligned} \{\sigma_{12}\} &= [T]\{\sigma_{xy}\}. \\ \{\varepsilon_{12}\} &= [T]\{\varepsilon_{xy}\}. \end{aligned}$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix},$$

Здесь  $x, y, z$  – главные оси слоистого композита, а  $1, 2, 3$  – главные оси слоя. Рассчитанные деформации слоя используются в свою очередь для определения текущих значений упругих констант по основным диаграммам деформирования материала слоя. Определенное таким образом  $[A]_{n+1}^{-1}$  подставляется в уравнение (5.11) для следующей ступени нагружения.

Процедура повторяется до тех пор, пока в одном из слоев не выполняется условие прочности, т.е. его деформации не достигают предельных значений, определенных из опытов в условиях одноосного напряженного состояния. При достижении поперечными деформациями предельного значения считается, что слой способен воспринимать касательные напряжения и нагрузку в направлении волокон. Если предела достигают сдвиговые деформации, слой сохраняет несущую способность в направлении волокон и в поперечном направлении. Полное исчерпывание несущей способности слоя характеризуется достижением предельных значений деформациями в направлении волокон. После разрушения какого-либо слоя,

предполагается, что приходящиеся на этот слой нагрузки переносятся на остальные слои. Процесс ступенчатого нагружения продолжается до тех пор, пока матрица  $[A]$  не станет сингулярной или пока члены на ее главной диагонали не приобретут отрицательных значений.

Рассматриваемый подход ограничивается анализом несущей способности слоистых композитов, симметричных относительно срединной плоскости, в условиях одноосного или пропорционального двухосного нагружения в плоскости армирования. Поскольку в основу подхода положена классическая теория слоистых сред, межслойные взаимодействия не учитываются [192].

В критерии типа критерия Мизеса-Хила для слоистого материала технологической единицей считается однонаправленный слой. Деформации КМ, вызванные любой приложенной нагрузкой, определяется при помощи его упругих свойств. Затем рассчитываются деформации  $\varepsilon_{ij}$  и напряжения  $\sigma_{ij}$  каждого слоя и при помощи критерия Хилла (5.6) до наступления предельного состояния в одном или нескольких слоях в соответствии с (5.6). После выполнения критерия, считается, что разрушено связующее волокон, но при условии, чтобы величина  $\sigma_l$  осталась меньше прочности слоя в направлении волокон. С другой стороны, если  $\sigma_l$  в разрушенном слое превышает соответствующее значение прочности слоя, предполагается, что разрушение произошло по волокну. Слой сохраняет несущую способность только в направлении армирующих волокон в случае выхода из строя связующего. Это осуществляется присвоением  $E_{22}$  и  $G_{12}$  значений близких к 0 ( $\approx 100 \text{ кг/см}^2$ ), чтобы избежать сингулярности матрицы податливости). Если разрушение слоя произошло по волокну, предполагается, что слой разрушен полностью и константам  $E_{11}, E_{22}$  и  $G_{12}$  присваивается чрезвычайно малое значение (также  $\approx 100 \text{ кг/см}^2$ ).

Считается, что разрушение локализовано в слое. После изменения упругих свойств разрушенного слоя, упругие свойства КМ определяются снова. Процесс ступенчатого приложения нагрузки повторяется до разрушения КМ в целом. Согласно выводу автора работы [13], материал слоя имеет различную прочность при растяжении и сжатии, но упругие константы не зависят от знака приложенной нагрузки.

**Энергетический критерий.** Этот критерий был предложен Сандху [161] (метод Сандху). Он отличается от других методов следующим:

- нелинейные диаграммы деформирования слоя задаются аналитически при помощи кубических сплайн-функций;
- разрушение слоя определяется по энергетическому критерию в соответствии с предположением о нелинейности;
- определяются эквивалентные приращения деформаций.

В отличие от метода Петита-Ваддоунса, Сандху в своем подходе пытается учесть эффект двухосного напряженного состояния путем определения после каждого шага нагружения “эквивалентных” деформаций.

Наступление предельного состояния слоя определяется по критерию, который для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$f(\sigma, \varepsilon) = K_i \left[ \int_{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i \right]^{m_i} = 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – текущие компоненты деформаций.

Критерий (5.12) является энергетическим и учитывает как энергию изменения формы, так и энергию изменения объема.

После достижения в слое предельного состояния, слой разгружается путем присвоения модулям поврежденных слоев нулевых значения. Процесс перераспределения нагрузки между слоями при ступенчатом нагружении продолжается до полного разрушения слоистого композита, который как и в предыдущем методе, определяется по виду матрицы жесткости [192].

Чамис [161] предложил критерий прочности, который позволяет учесть технологические переменные, такие как содержание и распределение волокон и пустот, адгезионное взаимодействие волокно-матрица, остаточные напряжения и т.п. Критерий прочности слоя имеет следующий функциональный вид:

$$f(\sigma, K_{l12}) = 1 - \left[ \left( \frac{\sigma_{1\alpha}}{X_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{1\beta}}{Y_\beta} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{X} \right)^2 - K'_{l12\alpha\beta} K_{l12} \frac{\sigma_{1\alpha}\sigma_{2\beta}}{|X_\alpha| |Y_\beta|} \right], \quad (5.13)$$

Здесь при  $f > 0$  разрушение отсутствует, при  $f = 0$  – начало разрушения,  $f < 0$  – условия разрушения превышены. Коэффициент  $K_{l12}$  определяется так:

$$K_{l12} = \frac{(1 + 4\nu_{12} - \nu_{13})E_{22} + (1 - \nu_{23})E_{11}}{[E_{11}E_{22}(2 + \nu_{12} + \nu_{13})(2 + \nu_{21} + \nu_{23})]^{1/2}}$$

а  $K'_{l12\alpha\beta}$  – коэффициент корреляции теории и эксперимента, который учитывает разносопротивляемость материала растяжению и сжатию и обеспечивает изменение связи между напряжениями в критерии. Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают растяжение и сжатие; индексом  $l$  отмечены свойства слоя. Рассмотренный критерий может быть объединен с теорией слоистых сред и использован для построения поверхности прочности КМ. Уравнение (5.12) в этом случае применяется для каждого слоя отдельно [161].

Обобщенный анализ применимости феноменологических критериев, а также критериев прочности, учитывающих наличие слоистой структуры материалов, проведен в работе Роуланда [161]. Сравнение расчетов по рассмотренным в работе критериям с экспериментальными данными также показал, что ни один из существующих теоретических подходов не позво-

ляет определить прочность КМ с точностью, достаточной для надежного проектирования.

**Микромеханические критерии прочности КМ.** Методы оценки прочности, основанные на микромеханическом анализе разрушения КМ не получили широкого распространения из-за следующих основных причин: сложности теории учета взаимодействия волокна и связующего, большого разброса характеристик компонентов, входящих в состав КМ, а также ввиду наличия остаточных напряжений.

Среди заслуживающих внимание методов микромеханики КМ следует отметить методику, разработанную Дау и Розеном [197], согласно которой прочность композитов при сжатии определяется зависимостью

$$X' = \left( \frac{\nu E_{\beta} \cdot \sigma_{TC}}{3(1 - \nu)} \right)^{1/2},$$

где  $\sigma_{TC}$  – предел текучести связующего, а  $\nu$  – объемное содержание волокон.

Розен [25] предложил рассматривать два вида потери устойчивости волокон в КМ. Первый носит название сдвигового и прочность при сжатии определяется формулой

$$X' = \frac{\sigma_c}{1 - \nu}.$$

Второй вид носит название натяжного, и в этом случае прочность при сжатии

$$X' = 2\nu \left( \frac{\nu E_{\beta} E_c}{3(1 - \nu)} \right)^{1/2}.$$

Оба представленных метода дают хорошее согласование теоретических данных с результатами экспериментальных исследований [168].

Микромеханические теории прочности обобщены и проанализированы в известной работе Чамиса [161]. Среди работ, посвященных микромеханике КМ особо следует отметить фундаментальные работы Ванина [25], а также Скудры и Булавса [134].

Поскольку большинство микромеханических теорий могут быть полезны только при анализе прочности материала, то применение их в расчете элементов конструкции, особенно при наличии повреждений на данном этапе проблематично. Поэтому наибольший интерес представляют макромеханические теории, в которых КМ рассматривается как квазиоднородный анизотропный материал или как слоистый.

**Методы механики разрушения КМ.** В любом материале, а тем более в таком неоднородном как КМ, имеются дефекты. Кроме того, в процессе

эксплуатации элементов, выполненных из КМ возникают эксплуатационные повреждения. Дефекты и повреждения являются источниками концентрации напряжений, от них возникают и развиваются трещины, которые могут привести к потере несущей способности элемента из КМ и даже к полному его разрушению.

Механизм разрушения представляет собой совокупность явлений, возникающих при разрушении и рассматриваемых с точки зрения механики. Проводимые исследования данной проблемы могут быть основаны как на микро-, так и на макро-подходе [9]. Так как методы микромеханики разрушения КМ неприменимы непосредственно к решению инженерных задач, то основными в настоящее время являются методы, основанные на макромеханических подходах описания процесса разрушения КМ. В последние годы механика разрушения – одна из наиболее активно развивающихся ветвей механики твердого тела [181]. Особенно активно ведутся работы по применению разработанных методов механики разрушения для описания процессов разрушения КМ.

В случае линейного механизма разрушения количественные результаты, оценивающие поведение трещины, получают методами линейной упругости, принимая во внимание деформацию и прочность материала, соответствующие разрушению от образования трещины [168].

Основой возникновения и развития линейной механики разрушения считается теория хрупкого разрушения Гриффитса [181]. Согласно данной теории, развитие трещины происходит тогда, когда освободившаяся часть энергии деформации оказывается больше приращения поверхностной энергии, необходимого для образования новой поверхности трещины. Если обозначить степень освобождения энергии через  $g$ , приходящуюся на единицу площади поверхностную энергию – через  $\gamma$  ( $\gamma$  – удельная энергия), то условие разрушения по Гриффитсу можно представить в виде

$$g \geq g_c = 2\gamma.$$

Позднее Орован [194] и Ирвин [186] независимо обнаружили, что “хрупкое” разрушение высокопрочных металлов сопровождается существенными пластическими деформациями в области, примыкающей к разрушенным поверхностям. Было показано, что если энергию, рассеянную при образовании этой пластической области, ввести в теорию Гриффитса в том же виде, что и освобождающуюся упругую энергию, то модифицированная теория Гриффитса довольно точно предсказывает неустойчивый рост трещины.

Различают в области кончика трещины 3 типа деформации:

- нормального отрыва (I рода);
- поперечного симметричного сдвига (II рода);
- продольного сдвига, или антиплоская (III рода).

На основании линейной теории упругости Ирвиным [185] было оценено поле напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном однородном теле с помощью коэффициента интенсивности напряжений (КИН). Выражения для полей напряжений и перемещений вблизи кончика трещины для плоской и антиплоской задачи можно свести к виду

$$\sigma_{ij} = \frac{K_M}{r^{1/2}} [f_{ij}(\theta)]_M,$$

$$u_i = \frac{K_M}{G} r^{1/2} [f_i(\theta)]_M,$$

где  $i, j = x, y, z$ ,  $M = I, II, III$  (вид трещины) и  $G$  – модуль сдвига. Если обозначить через  $K_c$  КИН в момент разрушения наиболее практически важной трещины нормального отрыва, то условие разрушения представляется так:

$$K_I \geq K_c,$$

Величина  $K_c$  является константой материала и находится экспериментально. Можно показать, что для хрупкого материала существует однозначное соответствие между КИН и  $g$ . Через использование поправки на текучесть Ирвин [185] обобщим концепцию КИН и на материалы, обладающие маломасштабной текучестью.

Для пластичных материалов на основе уравнения общего энергетического баланса Райс [190] предложил использовать  $J$ -интеграл, не зависящий от пути интегрирования

$$J = \int_{\lambda} U dy - \sigma_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds.$$

Здесь  $U = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  – плотность энергии деформации;

$\sigma_i$  – компоненты вектора напряжения вне контура  $\lambda$ , окружающего кончик трещины;

$ds$  – элемент дуги вдоль  $\lambda$  (по часовой стрелке);

$u_i$  – компоненты перемещения.

Райс показал, что поскольку плотность энергии деформации есть квадратичная функция деформации, то  $J = g$ . Классическая теория разрушения предполагает, что трещина распространяется линейно, использование  $J$ -интеграла не связано с таким ограничением. Эта особенность очень полезна при анализе КМ, в которых направление роста трещины может меняться [196].

Наиболее важными из работ по обсуждению применения методов механики разрушения к КМ являются работы Ву [37,38], Си и Чена [203], а также Цая и Хана [121].

Для решения задач разрушения КМ, наибольшее распространение получили макроскопические методы, в которых КМ представляется как квазиоднородный материал и которые имеют экспериментальное подтверждение. Обзор таких методов с подробным анализом дан в работах [181] и [203]. Приведем их короткое описание.

1. Концепция критического объема. Основная идея подхода, разработанного Ву [37,38], состоит в применении критерия прочности анизотропного тела без трещины в области перед макроскопической трещиной в анизотропном материале. Вуполагает, что в теле без макроскопической трещины существует “критический” объем, конечные размеры которого таковы, что он полностью включает в себя микротрещину. Разрушение материала наступает в тот момент, когда вектор напряжения, действующего на наружной поверхности этого объема, достигает величины вектора прочности, определяющего поверхность разрушения рассматриваемого материала в данном подходе напряженное состояние на поверхности объема ( $r_c$ ) выражается при помощи сингулярных форм  $\sigma_{ij}$ ; при  $r_c = r_c$ .

Отличное экспериментальное подтверждение подхода Ву было получено на однонаправленном стеклопластике (Scotchply 1002) для смешанного вида нагружения при наличии трещин, параллельных волокнам. Оказалось, что  $K_{IC}$  и  $K_{IIC}$  и величина критического объема для различных ориентаций трещины относительно приложенных нагрузок постоянны. Величина  $r_c$  оказалась приблизительно равной 1,95 мм [181]. Ву [210] вывел также критерий инициации трещин в анизотропных материалах

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^2 = 1.$$

Позднее Спенсер и Барнди [206] предположили, что критерий разрушения для наклонной трещины в ортотропных материалах может быть получен обобщением критерия Ву

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^m + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^n = 1.$$

где  $K_{IC}$ ,  $K_{IIC}$ ,  $m$  и  $n$  – характеристики материала, которые могут быть получены экспериментально.

2. Концепция плотности энергии деформации. Си [200] предложил критерий разрушения, позволяющий рассчитать как предельные нагрузки, так и направление роста трещины. Его подход основан на двух допущениях: 1) трещина распространяется в направлении максимума плотности потенциальной энергии; 2) момент начала роста трещины определяется критической интенсивностью потенциального поля  $S_{кр}$  (где  $\mu = S_{кр}r = -\mu_p$ ;  $\mu$  – плотность энергии деформации, а  $\mu_p$  – плотность потенциальной энергии).

При использовании этого подхода величина  $S_{кр}$  рассчитывается только из сингулярных членов сингулярного поля упругого напряжения. Причем описание ограничивается областью лежащей вне радиуса  $r_0$  вокруг кончика трещины. Поскольку в основе подхода положена линейная теория, радиус  $r_0$  должен быть достаточно большим, чтобы охватить любой нелинейный район около кончика трещины. Было найдено, что средняя величина  $r_0 \approx 0,51$  мм обеспечивает хорошее соответствие теории и эксперимента на слоистом стеклопластике (Scotchply 1002) со схемами армирования  $[\pm\theta^0]$ , при нагружении в направлении  $0^0$ .

3. Концепция гипотетической (внутренней) трещины. Подход разработан в работе Вадоупса и др. [33] при использовании решения Бови для трещины, распространяющейся от круглого отверстия в квазиизотропном углепластике с направлением армирования  $[0^0/90^0]_s$ . Подход основан на вычислении длины зоны интенсивного высвобождения энергии, определяемой как гипотетическая трещина длиной  $a$ . Хорошее соответствие с экспериментом получено для значения  $a = 1,02$  мм при изменении размера отверстия от 0,2 до 38 мм. Как отмечено в [12] этот подход аналогичен подходу Ирвина [185], учитывающему эффекты маломасштабной пластичности в металлах путем фиктивного увеличения длины трещины. Подход всецело полагается на экспериментальные данные для определения величины  $a$  и предельных напряжений слоистых КМ без дефектов [144].

Круз [176] представил отверстие радиусом  $R$  как трещину длиной  $a$ . Величина  $a$  была получена путем сравнения решений для отверстия и трещины в ортотропном материале. Затем предельная нагрузка слоистого КМ была определена при помощи линейной упругой механики разрушения с  $K_{IC}$ , найденным из независимого эксперимента для величины  $K_Q$ , рекомендуемой ASTM. Использование такого подхода дало отличные результаты для слоистого углепластика на эпоксидном связующем со схемами армирования  $[0_n^0/\pm 45^0]_s$  [160].

**Концепция критического расстояния.** Подход, разработанный Уитни и Нусмиером [209], использует два взаимосвязанных критерия для расчета предельных напряжений слоистых КМ с концентраторами напряжений. Эти критерии сформулированы независимо от линейной упругой механики разрушения. Однако было найдено, что использование в них точного распределения напряжений перед трещиной вместо обычного приближенного позволяет надлежащим образом предсказать предельные напряжения для ряда различных слоистых композитов с концентраторами напряжений.

Согласно первому критерию, разрушение наступает тогда, когда нормальные напряжения, направленные перпендикулярно трещине, достигают на определенном расстоянии  $d_0$  от ее кончика предельных значений полученных на таком же материале без трещины. Считается, что величина  $d_0$  является константой, присущей материалу и не зависящей от геометрии

образца и распределения напряжений. Эта величина характеризует расстояние, на котором в материале должно быть достигнуто критическое напряженное состояние, чтобы размеры существующего дефекта оказались достаточно большими для инициирования разрушения. Было найдено, что величина  $d_0$  приблизительно равна 1,02 мм не только для слоистых углепластиков (Т300/5208) с трещинами (схемы армирования  $[0^0/\pm 45^0]_s$ ,  $[0^0/\pm 45^0]_{2s}$ ,  $[0^0/90^0]_{4s}$ , но также и для стеклопластиков (Scotchply 1002) с круговыми отверстиями и аналогичными схемами армирования.

Согласно второму критерию, рассматривается расстояние  $a_0$  перед кончиком трещины, на котором уровень средних напряжений, рассчитанных на основе упругого решения, достигает предельных значений для материала без концентратора. Поэтому  $a_0$  по величине больше, чем  $d_0$  и для двух вышеупомянутых типов слоистых композитов составляет, как было найдено, около 3,82 мм.

Установлено, что величина  $K_Q$  изменяется вместе с длиной трещины в слоистых композитах вплоть до некоторого критического значения, после чего остается постоянной. Чтобы разобраться в этих изменениях, необходимо вместо упрощенной сингулярной формы использовать точное решение для напряжения перед трещиной, хотя оба эти решения и сходятся на достаточно большом расстоянии от трещины.

Вариант критерия средних напряжений Уитни-Ньюзмера [209] разработал Чен [211]. Его подход базируется на параметре повреждения, который представляет из себя совокупность неупругих микромеханических процессов, что происходят при вырезах и других концентраторах напряжений. Чен определил параметр разрушения  $D$  через предел прочности материала на растяжение  $\sigma_0$  следующим образом:

$$\frac{1}{D} \int_0^D \sigma_y dx = \sigma_0,$$

где  $\sigma_y$  – нормальное напряжение, действующее перед концентратором напряжений. Разрушение происходит, когда  $D$  становится равным предельному повреждению  $D_C$ , которое, как предполагается, является характеристикой материала, независимой от нагрузки и геометрии. Чен показал, что для различных слоистых КМ, использованных в ряде конфигураций образцов, существует единственное значение  $D_C$ . Он показал, что  $D_C$ , имеющее размерность длины, достаточно хорошо сравнимо с измеренными размерами зон повреждений.

5. Модель тонкой пластической зоны. Концепция, альтернативная теории разрушения Гриффитса-Ирвина, была выдвинута Баренблаттом. Чтобы избежать бесконечно больших напряжений в кончике трещины, он предложил, что в области перед трещиной, где полное разделение материала еще не наступило, действует поле когезионных сил. Считая, что напряже-

ния в этом поле постоянны и равны напряжению текучести  $\sigma_{ys}$ , Дагдейл [179] получил первое приближенное решение упругопластической задачи для трещины нормального разрыва (I рода). Дагдейл предположил, что зона текучести перед кончиком трещины в плоскости трещины имеет вид узкой щели с пластической областью размером  $b_0$ , которая увеличивается с размером трещины до предельного значения.

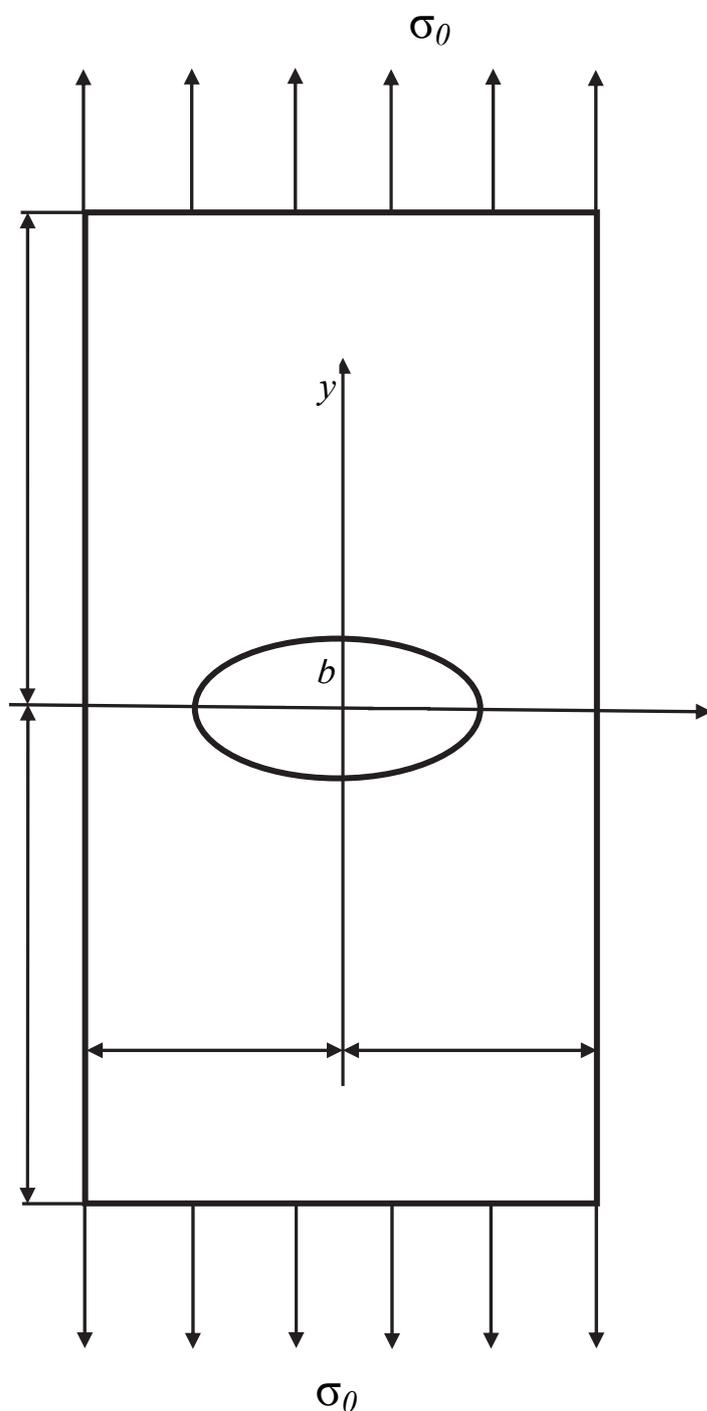


Рис. 5.1. Пластина с эллиптическим отверстием

Такая модель была использована в работе [181] для вычисления несущей способности слоистого композита с трещинами. Исследованы углепластик (Т300/5208) и стеклопластик (Scotchply1002) со схемами армирования  $[0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ]_{2s}$  и  $[0^\circ/90^\circ]_{4s}$ , нагружаемые в направлении  $0^\circ$ . Далее полученные результаты сравнивались с расчетами, основанными на концепциях 3 и 4. Оказалось, что применение подходов 3, 4 и 5 для предсказания предельных напряжений слоистых композитов с концентраторами напряжений приводит к практически одинаковым результатам и обеспечивает хорошее описание результатов экспериментов. Однако, показана необходимость смягчения некоторых теоретических ограничений, без которого методы механики разрушения нельзя применять для расчета предельных напряжений слоистых КМ с трещиной.

Большое число известных методов и подходов для оценки прочности КМ с отверстиями и тре-

щинами показывает отсутствие универсального метода и объясняет необходимость разработки нового метода, который давал бы возможность оценить прочность КМ с отверстиями, трещинами и пробоями.

На основании приведенного в данном подразделе обзора критериев и методов оценки прочности КМ можно систематизировать механические критерии прочности и объединить их в две основные группы. В первой группе предельное состояние определяется с позиций классических теорий прочности анизотропных сред применительно к КМ. При этом подходе теоретическая прочность получается обычно заниженной, так как критическое состояние элемента достигает предельного состояния в его наиболее напряженной точке. Ко второй группе относятся критерии прочности механики разрушения КМ, которые применяются при наличии трещиноподобных дефектов.

Новый метод оценки прочности элементов конструкций из КМ с повреждениями и вырезами, предложенный в разделе 1.1, базируется на совместном использовании классических теорий прочности механики сплошных сред и критериев механики разрушения применительно к КМ.

Большинство конструкционных КМ, применяемых в силовых элементах конструкций, могут быть отнесены к хрупким материалам. При наличии в элементе из КМ повреждения или выреза процесс разрушения происходит от данных концентраторов в результате мгновенного развития трещиноподобного дефекта. Поэтому предполагается, что при увеличении внешней нагрузки у повреждения или выреза в месте наибольшей концентрации напряжений (в ослабленном сечении элемента) возникает и увеличивается зона повреждения в КМ. Данную зону назовем «эквивалентной (фиктивной)» трещиной, которая при предельной нагрузке достигает своей критической длины.

Разработанный метод предельного состояния в разделе 2 для изотропных материалов применим и для КМ с своих механических характеристик материала и напряженно-деформированного состояния.

## **5.2. Прочность пластины из КМ с эллиптическим вырезом при действии одноосных равномерно-распределенных растягивающих напряжений, действующих на ее гранях**

Найдем предельное состояние пластины конечной ширины с эллиптическим вырезом, на значительном удалении от которого в направлении оси у действуют равномерно распределенные растягивающие напряжения  $\sigma_0$  (рис. 5.1). Материал пластины ортотропный.

Согласно предложенному в предыдущих главах способу определения предельного состояния пластины с концентратором необходимо знать напряженное состояние в ослабленном сечении и иметь формулу для вычис-

ления КИН при наличии радиальных трещин, выходящих на контур отверстия в опасном сечении.

Приближенную формулу для нормальных напряжений  $\sigma_y(x,0)$ , действующих на площадках в ослабленном сечении, можно получить с помощью решения [159] для бесконечной ортотропной пластины с отверстием и модифицированного метода сечений. Рассекая мысленно рассматриваемую пластину по сечению  $y = 0$ , составляя уравнение равновесия одной из отсеченных ее частей и решая его, получаем следующее выражение для нормальных напряжений:

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_0 \left[ 1 + \alpha \frac{a}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{\beta_2^2}{b - \beta_2 a} \left( 1 - \frac{\beta_2 a}{(b^2 + \beta_2^2(x^2 - a^2))^{1/2}} \right) - \frac{\beta_1^2}{b - \beta_1 a} \left( 1 - \frac{\beta_1 a}{(b^2 + \beta_1^2(x^2 - a^2))^{1/2}} \right) \right\} \right], \quad (5.14)$$

где

$$\alpha = \frac{(\beta_2 - \beta_1)B_1B_2}{S_2B_1 - S_1B_2},$$

$$B_i = b - \beta_i a;$$

$$S_i = \beta_1^2(W - a) - \beta_i \left( b^2 + \beta_i^2(W^2 - a^2) \right)^{1/2} \quad (i = 1, 2)$$

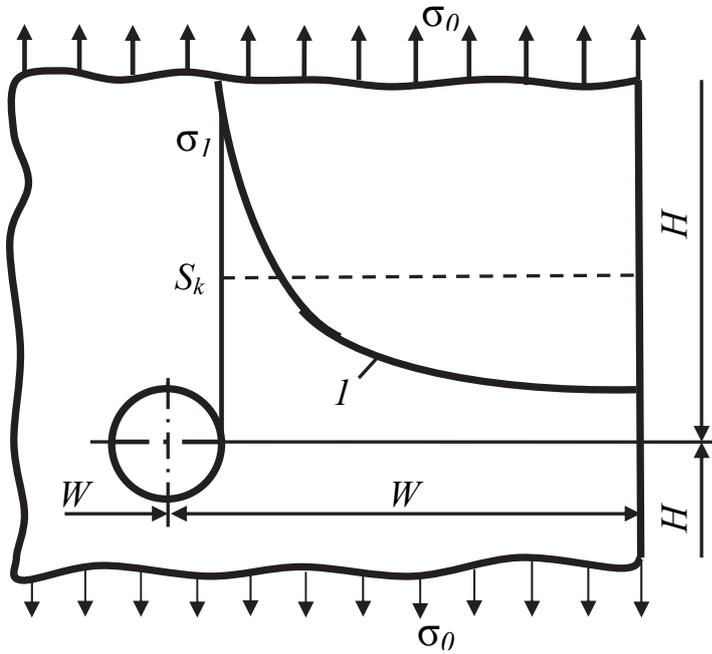
$\beta_1$  и  $\beta_2$  – комплексные части корней характеристического уравнения для выбранного ортотропного материала,  $a$  и  $b$  – полуоси эллиптического отверстия в пластине.

В качестве критерия прочности сплошного материала примем критерий статического разрушения материала (2.1), а в качестве условия разрушения – условие Ирвина (2.2).

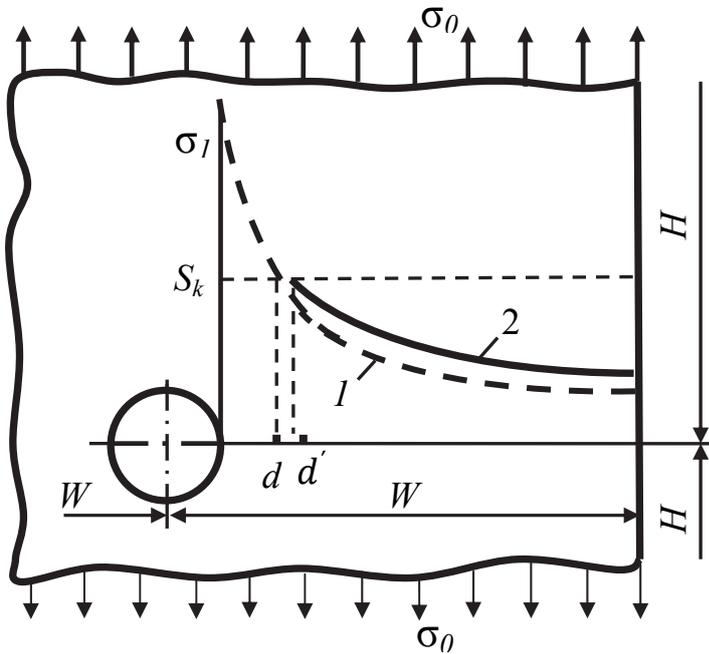
Применяя условие отрыва из (2.1) к формуле (2.3), получим зависимость между величиной напряжения  $\sigma_{0k}$ , приложенного к граням пластины, и размером зоны  $d$  возле выреза, в которой напряжение материала достигло значение истинного сопротивления отрыву:

$$\sigma_0 = S_k / \left[ 1 + \alpha \frac{a}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{\beta_2^2}{b - \beta_2 a} \times \left( 1 - \frac{\beta_2 a}{(b^2 + \beta_2^2(x^2 - a^2))^{1/2}} \right) - \right. \right. \quad (5.15)$$

$$\left. - \frac{\beta_1^2}{b - \beta_1 a} \left( 1 - \frac{\beta_1 a}{(b^2 + \beta_1^2 (x^2 - a^2))^{1/2}} \right) \right\} \Bigg],$$



a)



б)

Рис. 5.2. Перераспределение напряжений в пластине

Эту формулу можно применять для расчета пластин, у которых ось эллипса  $2a$  (в соответствии с рис. 5.1) во много раз меньше ее ширины ( $2a/2W < 1/6$ ). Для отношения  $2a/2W > 1/6$  к размеру зоны предельного состояния материала возле отверстия  $d$  следует добавить поправку, учитывающую перераспределение напряжений в пластине. Получим формулу для вычисления нового размера зоны предельного состояния  $d'$  возле отверстия.

На рис. 5.2, а построена эпюра нормальных напряжений  $\sigma_1$  в ослабленном сечении пластины. Ввиду того, что напряжения в пластине не могут быть выше предельных, принятых за критерий прочности материала, эпюру  $\sigma_1$  (кривая 1) отсекаем горизонтальной прямой на уровне  $\sigma_1 = S_k$  (рис. 5.2, а). Для выполнения условия равновесия пластины необходимо, чтобы отсеченная часть эпюры  $\sigma_1$  была распределена на нижней в той ее части, где напряжения еще не достигли  $S_k$ . В связи с перераспределением напряжений эпюра  $\sigma_1$  расположится немного выше своего первоначаль-

ного положения (кривая 2 на рис. 5.2,б). По этой же причине первоначальный размер зоны предельного состояния материала возле отверстия увеличится и станет равным  $d'$  (рис.5.2,б). Далее полагаем, что отсеченная верхняя часть эпюры  $\sigma_1$  распределена равномерно на нижней ее части, где напряжения не достигли  $S_k$ . Это соответствует тому случаю, когда новая эпюра (кривая 2 на рис. 5.2,б) строится от напряжения  $\sigma'_0$ , отличающегося от первоначального на какую-то величину  $\Delta\sigma$ , т.е.  $\sigma'_0 = \sigma_0 + \Delta\sigma$ . На основании этого можно записать следующие уравнения для вычисления  $\sigma'_0$  и  $d'$ :

$$\begin{aligned} \sigma_0 \int_a^w K(x) dx - \\ - S_k(d - a) - \\ - \sigma'_0 \int_a^w K(x) dx = 0, \\ \sigma'_0 = \frac{S_k}{K(d')}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где

$$K(x) = \sigma_y(x,0)/\sigma_0. \quad (5.17)$$

Выражение для КИН в пластине с эллиптическим отверстием и двумя радиальными трещинами (рис. 5.3) можно получить на основе решения [196] задачи о растяжении полосы, содержащей центральную трещину длиной  $2l$ . На поверхностях трещины задаются нормальные напряжения  $\sigma(x) = -\sigma(x,0)$ .

Тогда, используя формулу (5.15) и подход из [16], основанный на методе сечений и примененный в предыдущих решениях задач, получим следующее представление КИН для задачи, показанной на рис. 5.3:

$$K_I = 1,12 \sigma_0 l^{1/2} F(\lambda, \theta); \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} F(\lambda, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda}^{\theta} K(x) \left[ (\lambda^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + (1 - \theta^2)^{-\frac{1}{2}} \arctg \left( \frac{\theta^2 - x^2}{1 - \theta^2} \right)^{1/2} \right] dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\lambda = a/W, \theta = l/W,$$

$K(x)$  определяется по формуле (5.4).

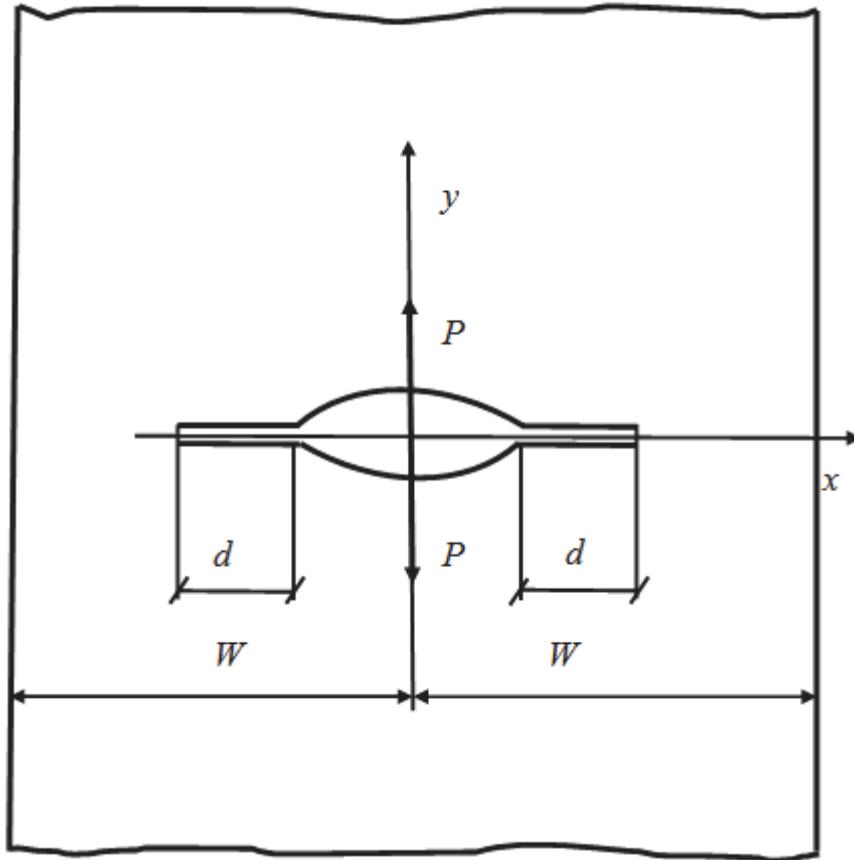


Рис. 5.3. Пластина с отверстием и двумя радиальными трещинами

Подставляя условие (2.2) в формулу (5.18), получаем условие разрушения пластины в виде:

$$K_I = K_C = 1,12 \sigma_0 l^{1/2} F(\lambda, \theta).$$

Отсюда

$$\sigma_0 = \frac{K_C}{1,12 l^{1/2} F(\lambda, \theta)}. \quad (5.20)$$

Таким образом, система уравнений для определения критического размера зоны предельного состояния материала возле отверстия  $d_k$  и напряжения  $\sigma_{0k}$  имеет следующий вид:

$$\sigma_{0k} = S_k / \left[ 1 + \alpha \frac{a}{\beta_2 - \beta_1} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{\beta_2^2}{b - \beta_2 a} \left( 1 - \frac{\beta_2 a}{(b^2 + \beta_2^2 (x^2 - a^2))^{1/2}} \right) - \right. \right.$$

$$-\frac{\beta_1^2}{b - \beta_1 a} \left( 1 - \frac{\beta_1 a}{(b^2 + \beta_1^2(x^2 - a^2))^{1/2}} \right) \Bigg] = 0, \quad (5.21)$$

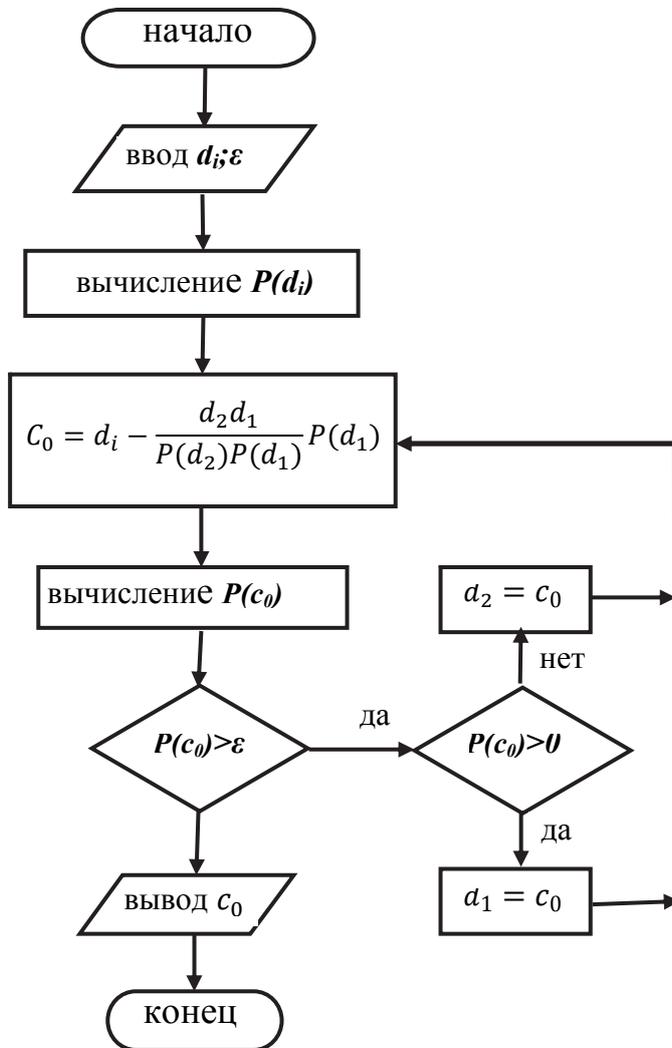
$$\sigma_0 - K_C / \left[ 1,12\sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F(\lambda, \theta) \right] = 0.$$

Во втором уравнении системы следует принять  $l = d$ .

Одним из возможных способов решения системы уравнений (5.21) является метод последовательных приближений [152].

Вычитая из первого уравнения системы (5.21) второе, получим

$$P(d) = \frac{K_C}{\left[ 1,12\sigma_0 l^{\frac{1}{2}} F(\lambda, \theta) \right]} - S_k / \left[ 1 + \alpha \frac{a}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{\beta_2^2}{b - \beta_2 a} \left( 1 - \frac{\beta_2 a}{(b^2 + \beta_2^2(x^2 - a^2))^{1/2}} \right) - \frac{\beta_1^2}{b - \beta_1 a} \left( 1 - \frac{\beta_1 a}{(b^2 + \beta_1^2(x^2 - a^2))^{1/2}} \right) \right\} \right]. \quad (5.22)$$



Здесь соотношение (5.22) записано в виде схемы Горнера [63].

Для определения корня уравнения (5.21) применим метод хорд. На рис. 5.4 приведена блок-схема решения методом хорд. Согласно этой блок-схеме первоначально в ЭВМ необходимо ввести значения размеров зон предельного состояния материала  $d_1$  и  $d_2$  ( $d_1 < d_2$ ) при условии, что корень уравнения находится в промежутке  $[d_1, d_2]$ . Далее вычисления следует производить по формуле (5.21) до тех пор, пока функция  $P(d)$  с каким-нибудь значением  $d_i = c_0$  не станет меньше заданной погрешности  $\varepsilon$ . Затем, подставляя окончательно найденный  $d$  в формулу (5.20), определяется критическое напряжение  $\sigma_{0k}$ .

Найдем предельное состояние ортотропной пластины 90x35x2,7 мм (углепластик КМУ

Рис. 5.4. Блок-схема метода хорд

– 3Л со схемой укладки слоев  $[0_3^0/90_2^0]_9$ ) при  $\beta_1 = 5,470$  и  $\beta_2 = 0,704$  для  $a = b = 2,5 \div 7$  мм. Данный материал имеет предел прочности  $\sigma_B = 12$  МПа и  $S_k = 21$  МПа. Для определения предельных параметров пластины составлена программа решения уравнения (5.22) на языке Бейсик, ориентированная на использование ПЭВМ в расчетах.

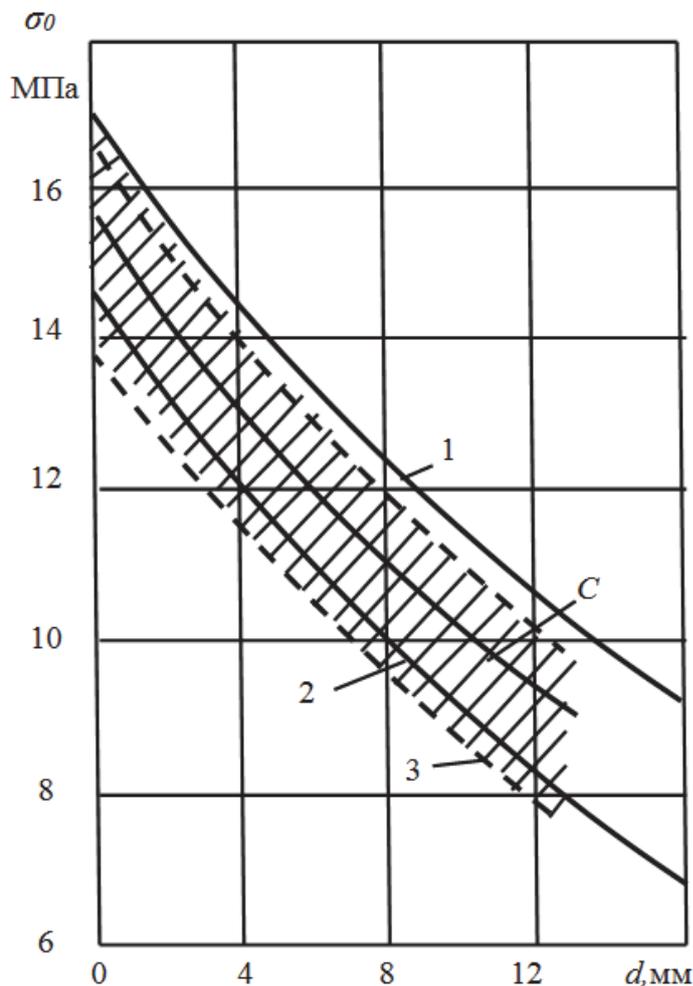


Рис. 5.5. Зависимость критического напряжения  $\sigma_{0k}$  от диаметра отверстия в пластине  $d$ : 1 – теоретическая кривая, построенная по предлагаемому способу с использованием критерия  $\sigma_I \geq S_k$ ; 2 – то же для  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$ ; С – то же при совместном использовании критериев  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$  и  $\sigma_I \geq S_k$ ; 3 – экспериментальная зависимость; /// – доверительная область экспериментальных данных.

На рис. 5.5 представлены результаты вычислений. Теоретическая кривая 1 построена на основании применения в расчетах критериев  $\sigma_I \geq S_k$  и  $K_I = K_C$ , а кривая 2 построена с использованием критериев  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$  и  $K_I = K_C$ .

Для проверки правильности расчетов по предложенному способу были проведены испытания плоских образцов, изготовленных из композиционного материала КМУ-3Л, на растяжение до разрушения. Характеристики данного материала приведены выше. Испытание образцов производилось на разрывной испытательной машине FP-10.

Данные испытания образцов с отверстиями на растяжение приведены в виде кривой 3 на рис. 5.5. Здесь же представлена доверительная область (заштрихована) экспериментальных значений критических напряжений  $\sigma_{0k}$ .

Теоретические кривые 1 и 2 дали двухстороннюю оценку параметров предельного состояния пластины с вырезом. Наибольшая разница теоретических и экспериментальных данных не превысила 12% при использовании в расчетах критериев  $\sigma_I \geq S_k$  и  $K_I = K_C$ . При применении критериев  $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$  и  $K_I = K_C$  погрешность способа ниже.

Однако, если вычислить среднеарифметические значения напряжений  $\sigma_0$ , полученных с использованием обоих критериев механики сплошной среды ( $\sigma_{ЭКВ} \geq \sigma_B$  и  $\sigma_I \geq S_k$ ), то погрешность способа не превысит 5%. (кривая  $C$  на рис. 5.5).

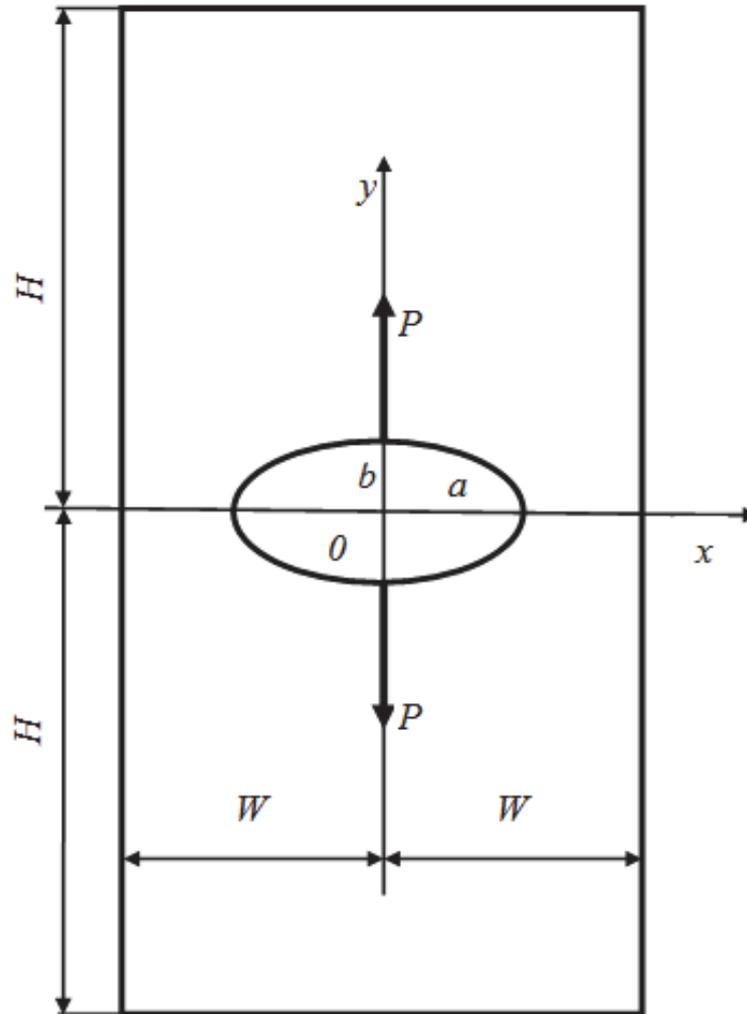


Рис. 5.6. Действие сосредоточенных сил на контуре эллиптического отверстия в пластине

### 5.3. Предельное состояние ортотропной пластины с эллиптическим вырезом при действии на его поверхности сосредоточенных сил

Рассмотрим пластину конечной ширины с эллиптическим вырезом (рис. 5.6). На контуре отверстия в точке  $(0, \pm b)$  действуют сосредоточенные силы  $P$ . Необходимо найти силу  $P = P_k$ , при которой пластина полностью разрушается. В соответствии с предложенным способом для определения критической силы  $P_k$  необходимо иметь формулы для определения

напряженного состояния в сечении  $y = 0$  (рис. 5.6) и КИН в пластине с двумя радиальными трещинами, выходящими на контур выреза (рис. 5.7).

Формулу для определения нормальных напряжений, действующих в сечении  $y = 0$ , получим из решения задачи о действии сосредоточенных сил на контуре отверстия в бесконечной пластине [110]. Вводя в это решение параметр  $\alpha$ , учитывающий конечность ширины пластины, в соответствии с методом сечений и выполняя некоторые преобразования, получим следующую приближенную формулу для нормальных напряжений:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{2\alpha Pa}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} [L_2(x) \cdot \beta_1 - L_1(x) \cdot \beta_2], \quad (5.23)$$

где

$$L_1(x) = \frac{(a + \beta_i b) [x + (k_a + \beta_i^2 b^2)^{1/2}]}{(k_a + \beta_i^2 b^2)^{1/2} [(a + \beta_i b) + (x + (k_a + \beta_i^2 b^2)^{1/2})^2]}$$

$$k_a = \frac{x^2 - a^2}{\pi(\beta_1 - \beta_2)}$$

$$\alpha = \frac{[\beta_1 \operatorname{arcctg} \varsigma_2(x) - \beta_2 \operatorname{arcctg} \varsigma_1(x)]_a^W}{\pi(\beta_1 - \beta_2)}$$

$$\varsigma_i(x) = \frac{x - (k_a + \beta_i^2 b^2)^{1/2}}{(a + \beta_i b)}; \quad (i = 1, 2)$$

Формулу для КИН в пластине с отверстием и двумя радиальными трещинами (рис. 5.7) получим на основе решения задачи [16] о растяжении полосы, содержащей центральную внутреннюю трещину длиной  $2l$ . Эта формула имеет вид:

$$K_I = 1,12Pl^{1/2}F(\lambda, \theta); \quad (5.24)$$

в которой  $F(\lambda, \theta)$  вычисляется по формуле (5.6) с учетом того, что в ней  $K(x) = \sigma_y(x, 0)/(Pa)$ , а  $\sigma_y(x, 0)$  находится из выражения (5.9).

Таким образом, используя формулы (2.2), (5.9), (5.10) и критерий  $\sigma_I = S_k$ , получим уравнение для определения критического размера зоны предельного состояния возле выреза в таком виде

$$P(d) = \frac{K_C}{\left[1,12d^{\frac{1}{2}}F(\lambda, \theta)\right]} -$$

$$-\frac{S_k \pi (\beta_1 - \beta_2)}{[L_2(x) \cdot \beta_1 - L_1(x) \cdot \beta_2]} = 0. \quad (5.25)$$

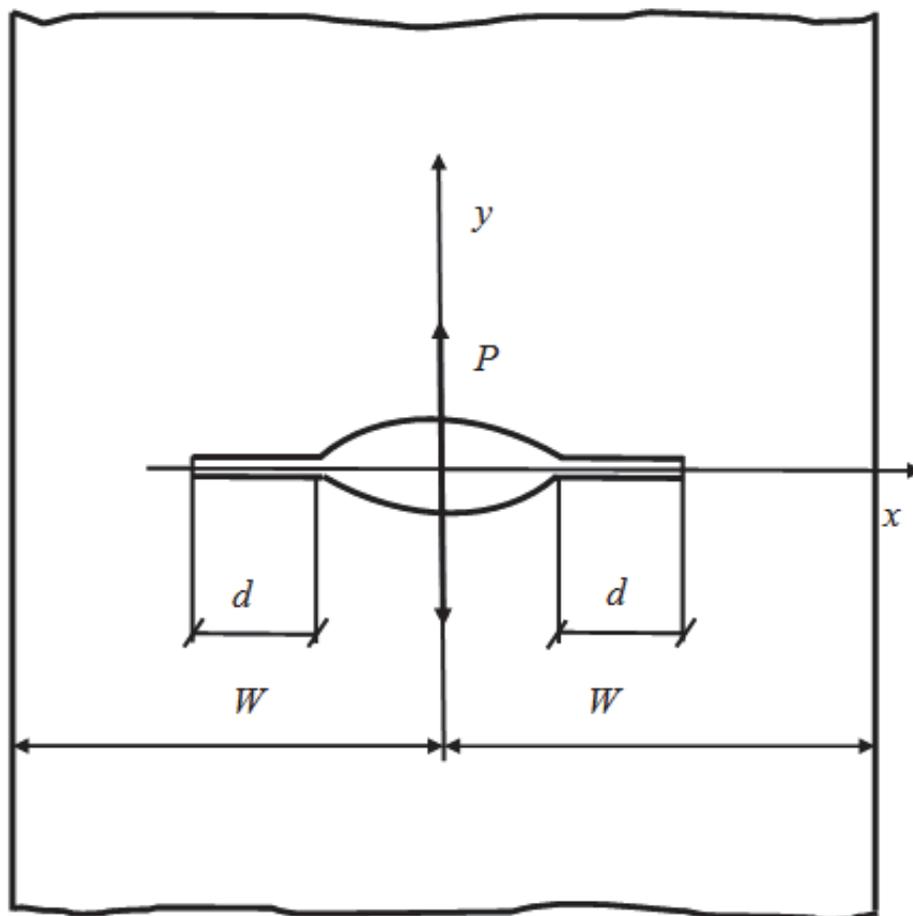


Рис. 5.7. Сосредоточенные силы в пластине с отверстием и двумя трещинами

После определения критического размера  $d_k$  по формуле (5.12) критическая сила  $P_k$  находится из следующего выражения:

$$P_k = \frac{K_C}{[1,12d^{\frac{1}{2}}F(\lambda, \theta)]}$$

Для проверки полученных формул проведены вычисления и экспериментальные исследования предельного состояния ортотропных пластин с отверстием. На рис. 5.8 представлены теоретические (кривые 1 и 2, построенные с использованием критериев  $\sigma_I = S_k$  и  $\sigma_{ЭKB} \geq \sigma_B$  соответственно) и экспериментальные данные (кривая 3) для композитной пластины (углепластик КМУ – 3Л со схемой укладки слоев  $[0_3^0/90_2^0]_s$  размером 90x45x2,7 мм при наличии эллиптического отверстия).

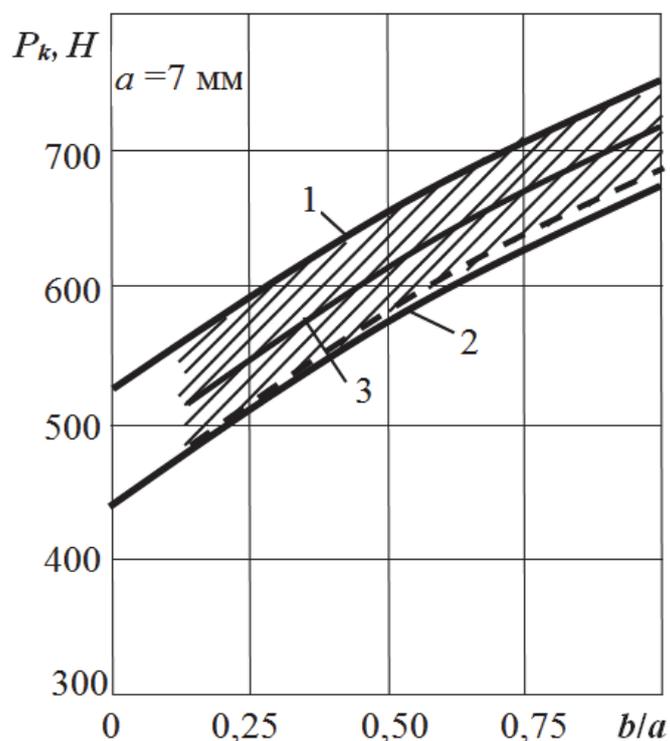


Рис. 5.8. Зависимость критической силы  $P_k$  от отношения полуосей эллиптического отверстия  $b/a$

Сравнение экспериментальных и расчетных данных в рассмотренном примере свидетельствует об эффективности предложенного способа определения предельного состояния элементов конструкций с вырезом. Разница расчетных и экспериментальных данных не превышает 9%.

#### 5.4. Заключение по разделу 5

1. Выполнен теоретический расчет предельного состояния элементов конструкций из ортотропного материала при наличии выреза и при различном виде приложения внешней нагрузки.

2. Сравнение теоретических и экспериментальных данных предельного состояния композитных пластин из однонаправленного углепластика при наличии отверстия показывает высокую эффективность разработанного способа определения предельного состояния.

3. Для указанных выше расчетов предельное состояние ослабленных конструктивных элементов вычислялись по двум критериям прочности механики сплошной среды, что позволило получить двухстороннюю оценку параметров критического состояния. Теоретические данные предельного состояния, полученные на основании совместного применения двух критериев прочности, отличаются от экспериментальных данных не более чем на 5%.

## ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. Разработан теоретический способ определения предельного состояния элементов конструкций из изотропного материала с концентратором в форме кругового выреза. С целью реализации предлагаемого способа развит метод сечений для вычисления напряженного состояния в ослабленном сечении полосы с круговым отверстием и коэффициентов интенсивности напряжений в данной полосе при наличии двух радиальных трещин.

2. Предложенный способ определения предельного состояния распространяется на расчет плоских элементов конструкций, поврежденных высокоскоростными механическими частицами. В процессе реализации данного способа получены формулы для вычисления напряженного состояния в ослабленном сечении пластины конечной ширины с подкрепленным отверстием (подкрепление моделирует зону поврежденного материала) и для КИН в указанной пластине при наличии двух радиальных трещин. Разработан способ определения упругих характеристик материала в зоне повреждения.

3. Разработанный теоретический способ определения предельного состояния листовых элементов конструкций из изотропного материала распространяется на случай наличия нескольких отверстий. Для реализации данного способа разработан численный метод определения напряженного состояния пластины с несколькими отверстиями и способ вычисления коэффициентов интенсивности напряжений в пластине конечных размеров с двумя отверстиями и четырьмя радиальными трещинами.

4. С использованием предложенного способа выполнен расчет анизотропных пластин с вырезом.

5. Испытание пластин из Д16АТ, АМГ6М и композиционного материала с вырезами подтверждает эффективность разработанного способа определения предельного состояния.

6. Разработаны программы вычисления напряженно-деформированного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений и реализованы на ПЭВМ.

7. Разработанные методы и полученные результаты работы внедрены в отраслевой научно-исследовательской лаборатории кафедры летательных аппаратов Самарского государственного аэрокосмического университета при решении практических задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексидзе, М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям [Текст] / М.А. Алексидзе. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
2. Алексидзе, М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач [Текст] / М.А. Алексидзе. – М.: Наука, 1991. – 352 с.
3. Алфутов, Н.А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов [Текст] / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, В.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
4. Андрейкив, А.Е. Пространственные задачи теории трещин [Текст] / А.Е. Андрейкив. – Киев: Наук, думка, 1982. – 345 с.
5. Ашкенази, Е.К. К вопросу о геометрии теории прочности [Текст] / Е.К. Ашкенази // Механика полимеров. – 1967. – №4. – С. 703 – 707.
6. Ашкенази, Е.К. Анизотропия конструкционных материалов [Текст] : справочник / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
7. Баландин, П.П. К вопросу о гипотезах прочности [Текст] /П.П. Баландин // Вестник инженеров и техников. – 1937. – № 1. – С. 37 – 41.
8. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст] / К. Бате, Е. Вильсон ; пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
9. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований [Текст] : Т.1. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи – М.: Мир, 1978. – 344 с.
10. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи П., Баттерфилд Р. ; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
11. Биргер, И.А. Расчет на прочность деталей машин [Текст] : справочник / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.
12. Бородачев, Н.М. Теоретический способ определения предельного состояния пластин с отверстием [Текст] / Н.М. Бородачев, Ю.И. Казаринов // Проблемы прочности. – 1990. – N 10. – С. 3–7.
13. Бородачев, А.Н. Несущая способность элементов конструкций с вырезами / Н.М. Бородачев, Ю.И. Казаринов //Современные проблемы механики и прочности летательных аппаратов: тезисы докладов IV Всесоюзной научной конференции. – Харьков, 1991. – Ч. 1. – С. 18.
14. Бородачев, А.Н. Предельное состояние пластины с несколькими отверстиями [Текст] / Н.М. Бородачев, Ю.И. Казаринов // Проблемы прочности.– 1994. Т.3.– С.44–52.
15. Бородачев, Н.М. Применение критерия механики разрушения к определению предельного состояния конструктивного элемента с отвер-

- стием / Н.М. Бородачев, Ю.И. Казаринов // Трещиностойкость материалов и элементов конструкций: тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума (Житомир, 1990). – Киев, 1990. – Ч. 1. – С. 8–9.
16. Бородачев, Н.М. , Кулий М.П. Обобщение метода плоских сечений для определения коэффициента интенсивности напряжений [Текст] / Н.М. Бородачев, М.П. Кулий. – Проблемы прочности , 1982. – N 2. – С. 23–27.
  17. Бородачев, Н.М. Об одной модификации метода плоских сечений для определения коэффициента интенсивности напряжений [Текст] / Н.М. Бородачев, М.П. Жданович, М.П. Кулий // Динамика, выносливость и надежность авиационных конструкций и систем. – М.: МИИГА, 1979. – С. 104–107.
  18. Бородачев, Н.М. Определение коэффициента интенсивности напряжений при растяжении цилиндра с круговой трещиной [Текст] / Н.М. Бородачев, М.П. Кулий.. – Вопросы эксплуатационной долговечности и живучести конструкций летательных аппаратов. – Киев: КНИГА, 1982. – С. 28–33.
  19. Бородачев, Н.М. Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях [Текст] / Н. М. Бородачев, В. В. Астанин // Проблемы прочности. – 2003. – № 3. – С. 62–69.
  20. Бреббия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия , Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
  21. Бреббия, К. Применение метода граничных элементов в технике [Текст] / К. Бреббия, С. Уокер: пер. с англ.– М.: Мир, 1982. – 248с.
  22. Булычев, С.И. Об оценке упругих деформаций при испытании вдавливанием индентора с регистрацией глубины отпечатка [Текст] / С.И. Булычев // Проблемы прочности. – 1989. –N 1. – с. 87.
  23. Булычев, С.И. Испытание материалов непрерывным вдавливанием индентора [Текст] / С.И. Булычев, В.П. Алехин. – М.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
  24. Вайншток, В.А. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений для поверхностных трещин в конструкциях. Сообщение 1 и 2 [Текст] / В.А. Вайншток. – Проблемы прочности. – 1984.. – N 3.. – С. 29–39.
  25. Ванин, Г. А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г.А. Ванин. – Киев: Наук, думка, 1985. – 304 с.
  26. Варвак, П. М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций [Текст]/ П.М. Варвак, Л.П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
  27. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 544 с.
  28. Васильев, В.З. Основы и некоторые специальные задачи теории упругости [Текст] / В.З. Васильев : монография. – М. : ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2012. – 216 с.

29. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы [Текст] / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
30. Гениев, Г.А. К вопросу об условии прочности бетона [Текст] / Г.А. Гениев // Исследования по вопросам пластичности и прочности строительных конструкций : сборник статей. – М. : Госстройиздат, 1958.
31. Гениев, Г.А. К вопросу обобщения теории прочности бетона [Текст] / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк // Бетон и железобетон. – М. : Госстройиздат, 1965, № 2.
32. Глебов, В.Д. О применении идей Мора к описанию деформирования и разрушения материалов [Текст] / В.Д. Глебов, С.А. Елсуфьев. // Изв. ВНИИГидротехники, 1966, № 82. – С.137–143.
33. Гольденблат, И.И. Длительная прочность в машиностроении [Текст] / И.И. Гольденблат, В.Л. Бажанов, В.А. Копнов. – М. : Машиностроение, 1977. – 248 с.
34. Гольденблат, И.И. Критерии прочности и пластичности конструктивных материалов [Текст] / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. 191 с.
35. ГОСТ 1497–84. Металлы. Методы испытаний на растяжение [Текст]. – Введ. 1986-01-01. – М. : Изд-во стандартов, 1984. – 35 с.
36. ГОСТ 25.506–85. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний материалов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении [Текст]. – Введ. 1986-27-03. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 66 с.
37. Ву, Э. Прочность и разрушение композитов // Композиционные материалы [Текст]. В 7. т. Т. 2. Разрушение и усталость / под ред. Браутмана Л. – М.: Мир, 1978. – С. 206–266.
38. Ву, Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Композиционные материалы [Текст]. В 7 т. Т.2 Механика композиционных материалов / под ред. Дж. Сендецки – М.: Мир, 1978 – С. 401–491.
39. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
40. Громадка, Т. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах [Текст] / Т. Громадка, Ч. Лей; пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
41. Гудрамович, В.С. Предельный анализ элементов конструкций [Текст] / В.С. Гудрамович, В.П. Герасименко, А.Ф. Деменков. – Киев: Наукдумка, 1990. – 136 с.
42. Давиденков, Н.Н. За и против единой теории прочности [Текст]/ Н.Н. Давиденков // Вестник инженеров и техников. – 1947, № 4. – С. 121–129.
43. Давиденков, Н.Н. О критерии прочности при хрупком разрушении и плоском напряженном состоянии [Текст] / Н.Н. Давиденков, А.И. Ставрогин // Изв. АН СССР. ОТН. – 1954. – № 8. – С. 101–109.

44. Дейч, А.Ш. Исследование механических характеристик металла различных зон сварного соединения на микрообразцах в широком интервале низких температур [Текст] / А.Ш. Дейч, Л.А. Копельман // Обработка металлов давлением и сварки. – Л. : Машиностроение, 1970. – С. 188–192.
45. Дошинский, Г.А. . Обобщение условия средней деформации на хрупкие материалы [Текст] / Г.А. Дошинский // Изв. Томского политех. ин-та. – 1959. – Т. 96, № 1. – С. 37–44.
46. Другач, М.И. Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости [Текст] / М.И. Другач. – Киев: Наук, думка, 1964. – 260 с.
47. Захаров, К.В. Критерий прочности для слоистых пластмасс [Текст] / К.В. Захаров // Пласт. массы. – 1961. – N 8. – С. 59–62.
48. Зенкевич, О.К. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О.К. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
49. Блюменауэр, Х. Испытание материалов [Текст] : справочник / под ред. Х. Блюменауэра. – М. : Металлургия, 1979. – 447 с.
50. Ишлинский, А.Ю. О равнопрочном сечении балки [Текст] / А.Ю. Ишлинский // Ученые записки Московского государственного университета. Механика. 1940, Вып. 46.
51. Казаринов, Ю.И. Влияние параметров повреждения на прочность элементов конструкций [Текст] / Ю.И. Казаринов.. А.Г. Лукашев, А.Г. Прохоров. – Деп. в ВИНТИ 30.03.92. – N 1062–В92. – 16 с.
52. Казаринов, Ю.И. Вопросы ремонтпригодности поврежденных элементов конструкций [Текст] / Ю.И. Казаринов. В.Г. Томилов // Приоритетное направление развития технологии ремонта воздушных судов. – К. : КИИГА, Вып. 12, С. 50–54
53. Каминский, А.А. Механика разрушения вязкоупругих тел [Текст] / А.А. Каминский. – Киев: Наук, думка, 1980.– 160 с.
54. Каминский, А.А. О критических нагрузках для областей, ослабленных отверстием с трещинами [Текст] / А.А. Каминский // Концентрация напряжений. – Киев: Наук, думка, 1965, С. 130–136.
55. Каминский, А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий [Текст] / А.А. Каминский. – Киев: Наук.думка, 1982. – 160 с.
56. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
57. Карпинский, В.И. Бетон в предварительно напряженной спиральной обойме [Текст] / В.И. Карпинский. – М.: Оргтрансстрой. – 1961.
58. Клокова, Н.П. Тензорезисторы: Теория, методики расчета, разработки [Текст] / Н.П. Клокова. – М.: Машиностроение, 1990. – 224 с.
59. Когаев, В.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность [Текст] / В.П. Когаев, Н.А. Махутов, А.П. Гусенков.– М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
60. Коллакот, Р. Диагностика повреждений [Текст] / Р. Коллакот.; пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 512 с.

61. Коллинз, Дж. Повреждение материалов в конструкциях: Анализ, предсказание, предотвращение [Текст] / Дж. Коллинз ; под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
62. Композиционные материалы [Текст] : справочник / под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
63. Корн, Г. Справочник по математике. [Текст] / Г.Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
64. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов [Текст] / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
65. Круз, Т.А. Метод граничных интегральных уравнений в механике разрушения [Текст] / Т.А. Круз // Метод граничных интегральных уравнений. – М.: Мир, 1978, С. 46–67.
66. Купрадзе, В.Д. Методы потенциала в теории упругости [Текст] / В.Д. Купрадзе. – М. : Физматгиз, 1963. – 472 с.
67. Лебедев, А.А. До теорії міцності при складному напруженому стані [Текст] / А.А. Лебедев // Докл. АН УРСР, Сер. А. – 1967. – N 1. – С. 527–531.
68. Леденев, В.В. Теоретические основы механики деформирования и разрушения: монография [Текст] / В.В. Леденев, В.Г. Однолько, З.Х. Нгуен. – Тамбов: Изд-во ФГБОУВПО «ТГТУ», 2013. – 312 с.
69. Ляв, А. Математическая теория упругости [Текст] /А. Ляв. – М.: ОНТИ, 1935.– 674 с.
70. Марковец, М.П. Определение механических свойств металлов по твердости [Текст] / М.П. Марковец. –М.: Машиностроение, 1979. – 191 с.
71. Махутов, Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность [Текст] / Н.А. Махутов.– М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.
72. Махутов, Н.А. Сопrotивление элементов конструкций хрупкому разрушению [Текст] / Н.А. Махутов. – М.: Машиностроение, 1973. – 200 с.
73. Махутов, Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность [Текст] / Н.А. Махутов – М. : Машиностроение, 1981. – 272 с
74. Сахаров, А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] /А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский и др.; / под общ.ред. А. С. Сахарова, А. Альтенбаха. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
75. Механика разрушения и прочность материалов [Текст] : в 4 т.: справочн. пособие ; под общей ред. Панасюка В.В. – К. : Наук, думка, 1988–1990.
76. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике [Текст] / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

77. Морозов, Е.М. Метод конечных элементов в механике разрушения [Текст] / Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
78. Морс, Ф. Методы теоретической физики [Текст]. Т.1. / Ф. Морс, Г. Фешбах. – М. : Изд-во иностр. лит., 1960.– 930 с.
79. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
80. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Физматгиз, 1962. – 511 с.
81. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел [Текст] / А. Надаи. – М. : ИЛ, 1954.
82. Наместников, В.С. О ползучести алюминиевого сплава [Текст] / В.С. Наместников // Ползучесть и длительная прочность. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1963. – С. 63–69.
83. Пригоровский, Н.И. Напряжения и деформации в деталях и узлах машин [Текст] / под ред. Н.И. Пригоровского. – М.:Машгиз, 1961. – 564 с.
84. Калинин, А.Е. Неразрушающий метод определения связи между напряжениями и деформациями в материалах [Текст] / А.Е Калинин, С.М. Ефремов. // Пробл. прочности, - 1989, N2, – С. 64.
85. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность [Текст] / С.В. Серенсен, В.Л. Когаев, Л.А. Козлов, Р.М. Шнейдирович. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
86. Новацкий, В. Теория упругости [Текст] / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975.– 872 с.
87. Овсянников, А.С. Метод суперпозиции сингулярных решений в задаче о напряженном состоянии полубесконечной пластины с краевым вырезом [Текст] / А.С. Овсянников, В.А. Стариков // Прикл. механика. – 1986. – 22, N 6. – С. 119–121.
88. Овсянников, А.С. Метод суперпозиции сингулярных решений в осесимметричных задачах теории упругости [Текст] / А.С. Овсянников, В.А. Стариков. – К. : Наук, думка, 1989. – 100 с.
89. Овсянников, А.С. Напряженное состояние пластины с несколькими отверстиями под действием осевой растягивающей нагрузки [Текст] / А.С. Овсянников, В.А. Стариков, Ю.И. Казаринов – Деп. в ВИНТИ 30.03.92, N 1064–В92, 6 с.
90. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред [Текст] / Дж. Оден. –М.: Мир, 1976. – 464 с.
91. Новиков, В.Н. Определение коэффициента Пуассона и модуля сдвига металлических стекол методом вдавливания [Текст] / В.Н. Новиков, Г.М. Коваль//Заводская лаборатория, – М.: Изд-во "ТЕСТ-ЗЛ", 1988, N 11. – с. 96.
92. Дрозд, М.С. Определение модуля нормальной упругости по глубине остаточного отпечатка индентора [Текст] / М.С. Дрозд, М.М. Мали-

- нин. // Заводская лаборатория, – М. : Изд-во "ТЕСТ-ЗЛ", 1988, N 12. – с. 87.
93. Галанов Б.А. Определение твердости и модуля Юнга при упругопластическом внедрении инденторов в материалы [Текст] / Б.А. Галанов и др. // Доклады АН СССР. – 1984. – 274. №4. – С. 815–817.
  94. Панасюк, В.В. Пространственные задачи теории трещин (обзор). Ч.1. Основные механические концепции и математические методы в пространственных задачах теории трещин [Текст] / В.В. Панасюк, А.Е. Андрейкив, М.М. Стадник – Львов : ФХММ, 1979, N5, С. 39–55.
  95. Панасюк, В.В. Деформационные критерии в механике разрушения [Текст] Ч.1. // Основные механические концепции и математические методы в пространственных задачах теории трещин [Текст] / В.В. Панасюк – Львов : ФХММ, 1986. – N 1. – С. 7–17.
  96. Панасюк, В.В. О важнейших задачах исследований по физико-химической механике конструкционных материалов [Текст] / В.В. Панасюк // Физ.-хим. механика материалов. – Львов : ФХММ, 1974. – N4. – С. 3–13.
  97. Панасюк, В.В. О современных проблемах механики разрушения. [Текст] / В.В. Панасюк // Физ.-хим. механика материалов. – Львов : ФХММ, 1982. – N 2. – С. 7–27.
  98. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [Текст] / В.В. Панасюк. – Киев: Наук, думка, 1968. – 246 с.
  99. Панасюк, В.В. Пространственные задачи теории трещин (обзор). Ч.2. Упругое и предельное равновесие твердых тел с трещинами при силовом нагружении [Текст] / В.В. Панасюк, А.Е. Андрейкив, М.М. Стадник. – Львов : ФХММ, 1979, N 5, с. 45–65.
  100. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышии. – К. : Наукова думка, 1976. – 444 с.
  101. Панасюк, В.В. Разрушение элементов конструкций с несквозными трещинами [Текст] / В.В. Панасюк, А.И. Сушинский, К.Б. Кацов. – К. : Наукова думка, 1991. – 172 с.
  102. Папкович, П.Ф. Теория упругости [Текст] / П.Ф. Папкович. – М. : Оборонгиз, 1939. – 640 с.
  103. Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения [Текст] / В.З. Партон, Е.М., Морозов. – М.: Наука, 1985. – 502 с.
  104. Партон, В.З. Интегральные уравнения теории упругости [Текст] / В.З. Партон, Е.М., П.И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
  105. Перри, К.К. Основы тензометрирования: пер. с англ. [Текст] / К.К. Перри, Г.Р. Лисснер. – М. : Изд-во иностр. лит., 1957. – 324 с.
  106. Петерсон, Р. Коэффициенты концентрации напряжений [Текст] / Р. Петерсон. – М. : Мир, IV/7. – 302 с.

107. Писаренко, Г.С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии [Текст] / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – К. : Наукова думка, 1976. – 415 с.
108. Писаренко, Г.С. Сопrotивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии [Текст] / Г.С. Писаренко, А.А. Лебедев. – К. : Наук, думка, 1969.– 212 с.
109. Полак, Л. С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в технике [Текст] / Л.С. Полак. – М. : Физматгиз, 1960. – 559 с.
110. Постнов, В.А., Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций [Текст] / В.А. Постнов, И. Я. Хархурин. – Л. : Судостроение, 1974. – 344 с.
111. Пресдорф, З. Некоторые классы сингулярных уравнений [Текст] / З. Пресдорф. – М. : Мир, 1979. – 493 с.
112. Прикладная механика композитов : сб. статей 1986—1988 гг. : пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 358 с.
113. Пустыльник, Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений [Текст] / Е.И. Пустыльник. – М.: Наука, 1988.
114. Работнов, Ю.И. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю.И. Работнов – М.: Наука, 1979. – 744 с.
115. Райс, Дж. Р. Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин [Текст] / Дж. Р. Райс. – Труды амер. об-ва ин.-мех. Сер.Е, 1968, 35, N 4, с. 340–350.
116. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике [Текст] / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985 – 590 с.
117. Ривош О.А. Сопrotивление материалов [Текст] / О.А. Ривош. – М. : Изд. Центр, заочн. механ. машиностр. ин-та, 1933.
118. Розен, Б. Механизмы усталости и потери несущей способности в слоистых композитах [Текст] / Б. Розен, С. Кулкарни, П. Мак-Лафлни // Неупругие свойства композиционных материалов ; под ред. Гераковича К. // Механика. – М.: Мир, 1978. – N16, – С. 93–103.
119. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам [Текст] / Л.А. Розин.– М.: Стройиздат, 1977. – 129 с.
120. Ройтман, Н.М. Микромеханический метод испытания металлов [Текст] / Ройтман, Я.Б. Фридман. – М. : Оборонгиз, 1950. – 135 с.
121. Роуланде, Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных [Текст] / Р. Роуланде // Неупругие свойства композиционных материалов. ; под ред. Гераковича К. / Механика . – М. : Мир, 1978. – № 16. – С. 140–179.
122. Руппeneйт, К.В. Механические свойства горных пород [Текст] / К.В. Руппeneйт. – М. : Углетехиздат, 1956.
123. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. – К. : Наук, думка, 1968.– 887 с.

124. Савин, Г.Н. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками [Текст] / Г.Н. Савин, В.И. Тульчий. – К. : Наук.думка, 1971. – 268 с.
125. Саврук, М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К. : Наук, думка, 1988. – 620 с.
126. Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
127. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности [Текст] : учеб.пособие для студентов вузов / В.И. Самуль. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
128. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
129. Серенсен, С.В. Об условиях прочности при переменных нагрузках для плоского и объемного напряженного состояния [Текст] / С.В. Серенсен // Инженерный сборник, 1941, Т.1. – Вып.1. – С. 3-12.
130. Серенсен, С.В. Прочность металла и расчет деталей машин [Текст] / С.В. Серенсен. – М. : ОНТИ, 1937.
131. Серенсен, С.В. Несущая способность и расчет деталей машин на прочность [Текст] / С.В. Серенсен, В.П. Когаев, Р.М. Шнейдерович. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
132. Си, Г. Математическая теория хрупкого разрушения [Текст] /Г. Си, Г. Либовиц. // Разрушение. – М.: Мир, 1975, Т.2, – С. 83-203.
133. Сиратори, М., Вычислительная механика разрушения [Текст] / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита ; пер. с японск. – М. : Мир, 1986. – 334 с.
134. Скудра, А.М. Прочность армированных пластиков [Текст] / А.М. Скудра, Ф.Я. Булаве. – М. : Химия, 1982. – 216 с.
135. Скудра, А.М. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков [Текст] / А.М. Скудра, Ф.Я. Булаве, К.А. Роценс. – Рига : Зинатне, 1971. – 238 с.
136. Смит, К. Ограничения в применении подходов механики разрушения к композитам. Неупругие свойства композиционных материалов [Текст] / К. Смит ; под ред. Гераковича К. // Механика. – М. : Мир, 1978. – № 16. – С. 221–248.
137. Снеддон, И.Н. Преобразования Фурье [Текст] / И.Н. Снеддон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1966. – 667 с.
138. Соколовский, В.В. Плоское предельное равновесие горных пород [Текст] / В.В. Соколовский // Известия АН СССР, ОТИ, № 9, 1948.
139. Соколовский, В.В. Статика сыпучей среды [Текст] / В.В. Соколовский. – М. : Физматгиз, 1960.
140. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений ; под ред. Мурахами Ю. – В 2 Т. – М. : Мир, 1990. – Т.1 – 448 с.
141. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами ; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М : Наука, 1979.– 932 с.

142. Лебедев, А.А. Справочное пособие по расчету машиностроительных конструкций на прочность [Текст] / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, С.Э. Уманский и др. – К. : Техника, 1990. – 240 с.
143. Стренг, Г., Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Аж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.
144. Схудра, А.М. Структурная теория армированных пластиков [Текст] / А.М. Схудра, Ф.Я. Булаве. – Рига : Зинатне, 1978. – 192 с.
145. Тарасенко, И.И. Об условии разрушения металлов [Текст] / И.И. Тарасенко // ЖТФ. – 1951. – Т. 21. – Вып. 11. – С. 1336–1344.
146. Тарасенко, И.И. Прочность стали при сложных напряженных состояниях в случае простого и сложного путей нагружения [Текст] / И.И. Тарасенко, О.Н. Халдина, В.М. Черепанов // Исслед. по упругости и пластичности. – 1961. – № 1. – С. 201–212.
147. Турчак, Л.И. Основы численных методов [Текст] / Л.И. Турчак. – М. : Наука, 1987. – 387 с.
148. Угодчиков, А.Г. Исследование двумерных задач теории упругости для тел сложной формы [Текст] / А.Г. Угодчиков // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. – М. : Наука, 1972.
149. Угодчиков, А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во Казан, ун-та 1986. – 386 с.
150. Улинич, Ф.Р. Некоторые вопросы теории хрупкого разрушения горных пород [Текст] / Ф.Р. Улинич // В кн. Разрушение углей и пород. – М.: Углетехиздат, 1958. – С. 401–510.
151. Уманский, С.Э. К построению более эффективных схем метода конечных элементов с помощью смягченных и смешанных аппроксимаций [Текст] / С.Э. Уманский // Пробл. прочности. – 1983. – N 7. – С. 112–118.
152. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости [Текст] / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
153. Филоненко–Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию [Текст] / М.М. Филоненко–Бородич – Инженерный сборник, 1961, Вып. 31. – С. 15–47
154. Филоненко–Бородич М.М. Механические теории прочности [Текст] / М.М. Филоненко–Бородич. – М.: Иад-во МГУ, 1961. – 91 с.
155. Финк К., Измерение напряжений и деформаций [Текст] / К. Финк, Х. Рорбах ; пер. с нем. – М.: Машгиз, 1961. – 535 с.
156. Фудзии, Т. Механика разрушения композиционных материалов [Текст] / Т. Фудзии, М. Дзако. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
157. Хан Х. Теория упругости [Текст] /Х. Хан. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
158. Херцберг, Р.В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов [Текст] / Р.В. Херцберг ; пер. с англ. ; под ред. Бернштейна М. Л., Ефименко С.П. – М.: Металлургия, 1989. – 576 с.

159. Цай, С, Анализ разрушения композитов [Текст] / С. Цай, Х. Хан // Неупругие свойства композиционных материалов. – М. : Мир, 1978. – 295 с.
160. Цай, С. Анализ разрушения композитов [Текст] / С. Цай, Х. Хан // Неупругие свойства композиционных материалов ; под ред. Гераковича К.: Механика. – М.: Мир, 1978. – № 16. – С. 104–139.
161. Чамис К. Микромеханические теории прочности [Текст] / К. Чамис // Композиционные материалы. – В 7 т. Т. 5. – Разрушение и усталость ; под ред. Л. Браутмана. – М. : Мир, 1978. – С. 106–165.
162. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г.П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
163. Экспериментальная механика: В 2-х кн. ; пер. с англ. ; под ред. А. Кобаяси. – М. : Мир, 1990.
164. Экспериментальные методы исследований деформаций и напряжений [Текст] : справочник. – М.: Машиностроение, 1983. – 248 с.
165. Галанов Б.А. Определение твердости и модуля Юнга при упругопластическом внедрении инденторов в материалы [Текст] / Б.А. Галанов , О.Н. Григорьев, Ю.В. Мильман // Докл. АН СССР. – 1984.–274, N4.– С. 815–817.
166. Ягн Ю.И. Новые методы расчета на прочность [Текст] / Ю.И. Ягн // Вестник инженеров и техников, 1931, Вып. 6. – с.122–127.
167. Ярема, С.Я., Предельное равновесие и развитие косых трещин: (Обзор критериев) [Текст] / С.Я. Ярема, Г.С. Иваницкая // Физ.-хим. механика материалов. 1986. –N 1. – С. 45–57.
168. Яцеико, В.Ф. Прочность композиционных материалов [Текст] / В.Ф. Яцеико. – К. : Выща школа, 1988. – 191 с.
169. Backlund, J., Aronson C.G. Tensile Fracture of Laminates with Holes [Текст] / J. Backlund // J. of Composite Materials. – 1986. – V. 20, N3. – P.259–285.
170. Borodachev, N.M., Limiting State of Construction Elements with Different Kind of Damages// Fracture Mechanics: Successes and Problems [Текст] / N.M. Borodachev, Yu.I. Kazarinov, O.A. Shevchenko / ISF – 8, Kiev, 8 – 14. 06. 1993, Vol. 1, P.21–22.
171. Bowie, O.L. Analysis of an Infinite Plate Containing Radial Cracks Originating from the Boundary of an Internal Circular Hole [Текст] / O.L. Bowie // J. Math, and Phys., 1956, Vol. 35.
172. Bowie, O.L. Solutions of Plane Crack Problems by Mapping Technique [Текст] / O.L. Bowie //Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, Leyden, 1973, V.1, p. 1–55.
173. Burton, P. A modification of the Coulomb–Mohr theory of fracture [Текст] / P. Burton // Journal of Applied Mechanics, Ser. E , 1961, Vol.28:259.
174. Burzynski, W. Über die Anstrengungshypothesen [Текст] / W. Burzynski // Schweizerische Bauzeitung. – Vol.94, Nr.21, 1939, pp. 259–262.

175. Cruse, T.A. Elastic Singularity analysis [Текст] / T.A. Cruse // Int. Symp. Innov. Num. Meth. Appl. Eng. Sci. Versailles, 1977, p.p. 1-5.
176. Cruse, T.A. Tensile Strength of Notched Composites [Текст] / T.A. Cruse // J. Compos. Materials. – 1973. – № 7. – P. 218–229.
177. Davis, B. Integral Transforms and Their Applications [Текст] / B. Davis – New York's Springer. 1978. – 412 p.
178. Dow, N.F. Evaluation of filament-reinforced composites for aerospace structural applications [Текст] / N.F. Dow, B.W. Rosen // NASACR-207, 1965.
179. Dugdale, D.S. Yielding of Steel Sheets Containing Slits [Текст] / D.S. Dugdale // J.Mech. and Phys. Solids. – 1960. – N 8. – P. 100 – 104.
180. Erdogan, P. Numerical Solution of Singular Integral Equations [Текст] / P. Erdogan, G.D. Gupta, T.S. Cook // Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, Leyden, 1973, V.1, P. 368-425.
181. Griffith, A.A. The Phenomenon of Flow and Rupture in Solids [Текст] / A.A. Griffith // Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1920, Ser. A, 221, p.p. 163–198.
182. Griffith, A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids [Текст] / A.A. Griffith // Philos. Trans. Roy. Soc. – London, A221,1920. – P.P. 163–198.
183. Gross, B. Stress intensity factors for three point bend specimen by boundary collocation [Текст] / B. Gross, J.E. Srawley // Techn. Note, D-3092, NASA, Dec. 1965.– P. 12–17.
184. Hilton, P.D. Application of Finite Element Method to the Calculations of Stress Intensity Factors [Текст] / P.D. Hilton, G.C. Sih // Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. Ed. G.C. Sih.– Leyden: Noordhoff, 1973, Vol. 1, P. 426–489.
185. Irwin, G.R. Analysis of Stresses and Strain Near the End of a Crack Traversing a Plate [Текст] / G.R. Irwin // Trans. ASME, Ser. E, 79, J. Appl. Mech. – 1957. – P. 361–364.
186. Irwin, G.R. Fracture Dynamics. Fracturing Metals [Текст] / G.R. Irwin // Amer. Soc. Metals. – 1948. – P. 147–166.
187. Irwin, G.R. Fracture Mechanics [Текст] / G.R. Irwin // Structural Mechanics. – New York: Pergamon Press, 1960, p. 557–591.
188. Irwin, G.R. Fracture [Текст] / G.R. Irwin // Handbuch der Physik, 6, Berlin: Springer Verb., 1958, P. 551–590.
189. Loeber, J.P. Green's Function for Cracks in Nonhomogeneous Materials [Текст] / J.P. Loeber, Sih G.C. // Journal of Applied Mechanics. 1967. Vol. 34, no. 1. P.P. 240–243.
190. Meclintock, F.V. Plasticity Aspects of Fracture Mechanics. Fracture Toughness Testing and Its Applications [Текст] / F.V. Meclintock, G.R.Irwin // ASTM STR 381, April, 1965. – P. 84–113.
191. Orowan, E. Energy Criteria of Fracture [Текст] / E. Orowan // Welding Res. Suppl. – 1955. – N 20, 157 p.

192. Petit, P.H. A method of predicting the nonlinear behavior of laminated composites [Текст] / P.H. Petit, M.E. Waddoups // J. Compos. Mater. – January 1969. – Vol. 3. – P. 2–19.
193. Puppo, A.H. Strength of Anisotropic Materials under Combined Stresses [Текст] / A.H. Puppo, Evensen H.A. // AIAA Journal – 1972. – 10, № 4. – P.P. 468–474.
194. Qrawan, E.O. Fundamentals of Brittle Behaviors of Metals [Текст] / E.O. Qrawan // Fatigue and fracture of metals. New York: Wiley, 1950, P.P. 139–167.
195. Rice, J.R. A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks [Текст] / J.R. Rice // J. Appl. Mech. – June 1968. – P.P. 379–386.
196. Rice, J.R. Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media [Текст] / J.R. Rice, G. Sih // ASME JOURNAL OF APPLIED MECHANICS. – 1965, Vol. 32, P.P. 418–423.
197. Rosen, B.W. Mechanics of composite strengthening. Fiber composite materials [Текст] / B.W. Rosen // ASM72, 1965. – P.P. 75.
198. Sandhu, R.S. Non-linear response of unidirectional and angle ply laminates [Текст] / R.S. Sandhu // AIAA, April 1974. – P.P. 74–380.
199. Schleicher, F. Zeitsch [Текст] / F. Schleicher // Angew. Math. und Mech., 1935, Vol. 5, Nr. 6.
200. Sih, G.C. A Special Theory of Crack Propagation [Текст] / G.C. Sih // Method of Analysis and Solutions to Crack Problems, Ed. G.C. Sih. – P. 21–65.
201. Sih, G.C. Handbook of Stress Intensity Factors for Researches and Engineers [Текст] / G.C. Sih // Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1973. – 415 p.
202. Sih, G.C. On the Westergaard Method of Crack Analysis [Текст] / G.C. Sih // Int. J. Fract. Mech., 1966, 2. P. 629–631.
203. Sih, G.C., Chen E.P. Fracture Analysis of Unidirectional Composites [Текст] / G.C. Sih // J. Compos. Materials – April 1973. – № 7. – P.P. 230–244.
204. Sneddon, I.N. Integral Transform Methods [Текст] / I.N. Sneddon // Ins Methods of analysis and solutions of crack problems. Mechanics of fracture, Leyden, 1973, Vol. 1, P. 315–367.
205. Sommer, E. An Optical Method for Determining the Crack Tip Stress Intensity Factor [Текст] / E. Sommer // Eng. Fract. Mech., 1970, Vol.1, P.P. 705–718.
206. Spencer, B. The Effects of Notch and Fibre Angles on Crack Propagation in Fibre-Reinforced Polymers [Текст] / B. Spencer, J.T. Barnby // J. of Materials Science. – 1976. – 11, № 1. – P.P. 83–88.
207. Waddoups, M.E. Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials [Текст] / M.E. Waddoups, J.R. Eisenmann, B.E. Kaminski // J. Compos. Materials. – October 1971. – № 5. – P.P. 446–454.

208. Weigler, H. Über das Bruch- und Verformungsverhalten [Текст] / H. Weigler, C. Becker // Bauingenieur – 1961, Vol. 36, Nr. 10, S. 390–396.
209. Whitney, J.M. Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations [Текст] / J.M. Whitney, R.J. Nuismer // J. of Composite Materials. – 1974. – 8, N3. – P. 253–265.
210. Wu, E.M. Application of Fracture Mechanics to Anisotropic Plates [Текст] / E.M. Wu // J. of Appl. Mech. – 1967. – 34, № 4. – P. 967–974.
211. Zhen, S. The D Criterion in Notched Composite Materials [Текст] / S. Zhen // J. of Reinforced Plastics and Composites. 1983. – 2. – p. 98–110.

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Настоящее приложение содержит базовую информацию по теории упругости и вывод основных уравнений для неограниченной области, являющихся основой для представленных в монографии решений задач для пластин конечных размеров. В качестве основных монографий и учебников из этой научной области можно порекомендовать [69, 79, 86, 102, 114, 157 и др.].

Теория упругости изучает действие сил на упругие тела и определяет возникающие при этом напряжения и деформации.

Такие же задачи рассматриваются и в сопротивлении материалов. Однако, между сопротивлением материалов и теорией упругости имеются существенные различия, которые заключаются в исходных предпосылках и в методах решения задач. Сопротивление материалов не может решать задачи по определению напряженного и деформированного состояния тела, если его форма отличается от стержня (бруса) и представляет собой, например, пластину, оболочку, массив и т.д. Такие задачи можно решать только методами теории упругости, основные предпосылки которой отличаются достаточной широтой и не ограничиваются такой формой тела, как стержень. Элементарная теория не дает также способа исследования напряжений в местах резкого изменения поперечного сечения элементов конструкций, где возникает концентрация напряжений. Методами сопротивления материалов невозможно решить и задачу о контакте двух упругих тел, которая имеет большое применение в технике.

Теория упругости использует более общие методы решения задач, благодаря чему обеспечивается более высокая точность и строгость решения по сравнению с методами сопротивления материалов.

**Основные гипотезы.** Одной из идеализаций твердого тела является свойство идеальной упругости. Это свойство положено в основу той ветви механики твердого деформируемого тела, которая называется теорией упругости.

Идеальная упругость есть способность тела, получившего деформацию, после устранения причин, вызывающих ее, полностью восстанавливать свою первоначальную форму.

В теории упругости применяют следующие гипотезы.

*Гипотеза о сплошности строения упругого тела.* В соответствии с этой гипотезой сплошное тело, непрерывное до деформации, остается непрерывным и после деформации. Поэтому, деформации и перемещения точек тела считаются непрерывными функциями координат.

*Гипотеза о естественном ненапряженном состоянии.* Согласно этой гипотезе существующие до приложения нагрузок начальные напряжения в теле полагаются равными нулю.

*Гипотеза о том, что материал тела наделен свойствами идеальной упругости, шаровой изотропии и совершенной однородности.* Кроме того принимается линейная зависимость между деформациями и напряжениями. Шаровая изотропия предполагает, что свойства материала одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки.

*Гипотеза о том, что напряженное состояние в данной точке зависит от деформации в этой же точке.*

*Гипотеза (принцип) Сен-Венана.* В точках тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок, напряжения мало зависят от способа осуществления этих нагрузок.

В линейной теории упругости принято считать, что:

- а) перемещения тела малы по сравнению с линейными размерами тела;
- б) относительные деформации (линейные и угловые) весьма малы по сравнению с единицей.

## 1.1. Силы и напряжения

Внешние силы, действующие на тело, делятся на поверхностные и объемные. Поверхностные силы распределены по поверхности тела, например давление воды на плотину, давление фундамента здания на грунт и т.п. Объемные силы действуют на каждую частицу среды. К ним относятся сила тяжести, силы инерции.

Рассмотрим твердое тело, находящееся в равновесии под действием поверхностных и объемных сил (рис. 1.1). Внешние силы вызывают появление в теле внутренних сил. Для исследования внутренних сил применим метод сечений. Рассечем тело плоскостью на части *A* и *B* и часть *B* отбросим. Положение плоскости сечения определяется внешней нормалью *v*. Часть тела *A* находится в равновесии под действием внешних сил и внутренних сил непрерывно распределенных по плоскости сечения. Выделим в плоскости сечения площадку  $\Delta F$  (рис. 1.1). Пусть равнодействующая внутренних сил на этой площадке равна  $\Delta S$ . Тогда величина

$$p_v = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta F}$$

называется напряжением в данной точке на площадке с нормалью *v*. Удобнее вместо полного напряжения  $p_v$  рассматривать его составляющие по координатным осям  $X_v, Y_v, Z_v$  (рис. 1.2).

В сечениях, параллельных координатным плоскостям, индекс взаменяют индексом координатной оси, нормальной к сечению.

Например, в сечении, параллельном плоскости  $yOz$  (рис. 1.2), внешняя нормаль параллельна оси  $x$  и напряжения обозначаются так:  $X_x, Y_x, Z_x$ . Напряжение  $X_x$  направлено перпендикулярно сечению и называется нормальным напряжением, а  $Y_x, Z_x$ , лежащие в плоскости сечения, называются касательными напряжениями. Для обозначения напряжений используют и другие системы обозначений. В дальнейшем будем использовать систему, в которой нормальное напряжение обозначается буквой  $\sigma$  с одним индексом (который указывает нормаль к сечению), а касательное напряжение обозначается буквой  $\tau$  с двумя индексами (первый указывает направление напряжения, а второй – нормаль к сечению).

Итак, имеем девять напряжений в любой точке тела (на трех площадках параллельных координатным плоскостям)

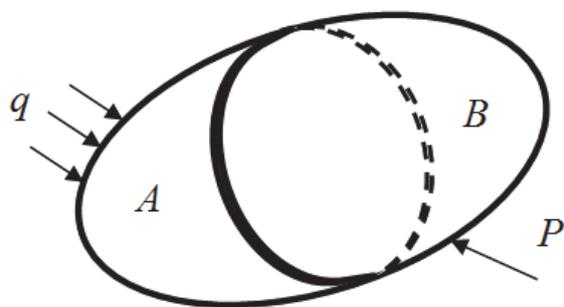


Рис.1.1. Тело под действием внешних сил  $P$  и  $q$

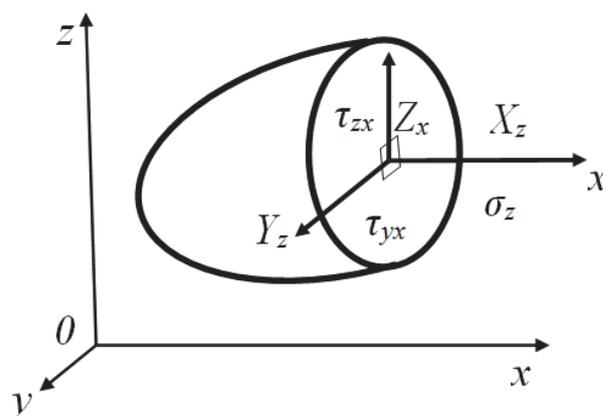


Рис.1.2. Составляющие полного напряжения  $p_v$

$$\begin{aligned} X_x &= \sigma_x & Y_x &= \tau_{yx} & Z_x &= \tau_{zx} \\ Y_y &= \sigma_y & Z_y &= \tau_{zy} & X_y &= \tau_{xy} \\ Z_z &= \sigma_z & X_z &= \tau_{xz} & Y_z &= \tau_{yz} \end{aligned}$$

причем три из них являются нормальными напряжениями, а шесть – касательными напряжениями.

На рис. 1.3 показаны положительные напряжения на площадках, параллельных координатным плоскостям. Соответствующие отрицательные напряжения будут направлены в противоположные стороны.

Напряжения, возникающие в твердом теле, могут быть различными в разных точках тела, т.е. являются функциями координат точек:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z) \\ \dots \end{aligned}$$

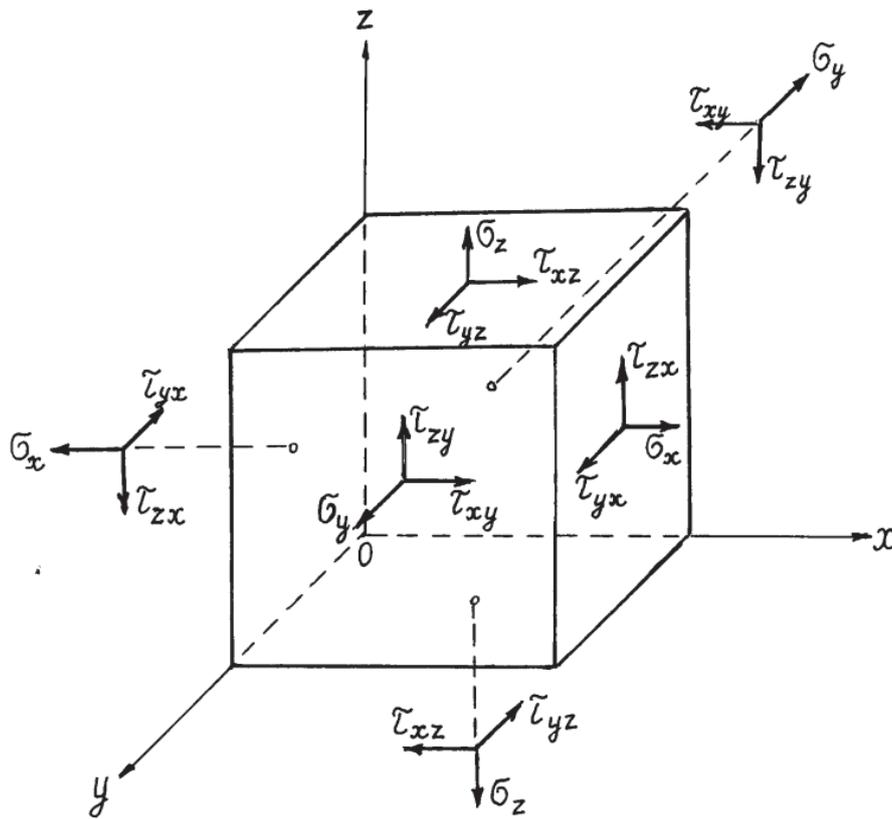


Рис. 1.3 Положительные напряжения на площадках параллелепипеда

### 1.1.2. Дифференциальные уравнения равновесия. Закон парности касательных напряжений.

Выделим из тела, находящегося под действием внешних сил элементарный параллелепипед с гранями параллельными координатным плоскостям. На каждой грани имеем три напряжения, которые являются функциями координат (рис. 1.4). На левой грани (параллельной плоскости  $yOz$ ) нормальное напряжение обозначим  $\sigma_x$ , а на правой грани обозначим

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

Аналогично связаны и остальные напряжения на параллельных гранях параллелепипеда. На параллелепипед действует и объемная сила, составляющие которой, отнесенные к единице объема тела, обозначим  $X, Y, Z$ .

Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей. Составим уравнение проекций всех сил на ось  $x$ . Имеем

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_z dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} dx\right) dx dz -$$

$$- \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy +$$

$$+ X dx dy dz = 0.$$

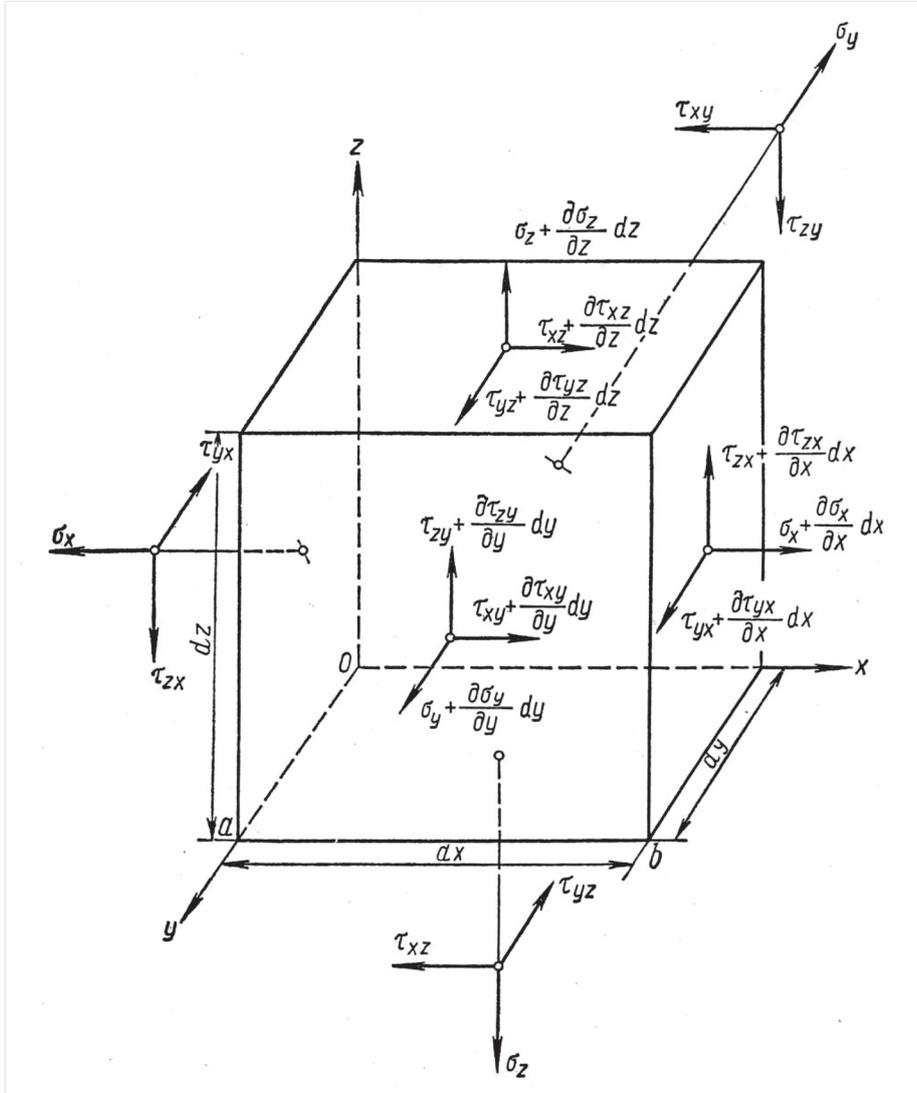


Рис. 1.4. Параллелепипед

После раскрытия скобок, приведения подобных членов и деления на объем  $dV = dx dy dz$ , окончательно получим

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично можно составить уравнения проекций на оси  $y$  и  $z$ . Таким образом, получаем три дифференциальных уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.1}$$

Составляя уравнения моментов относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  получаем три равенства:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{1.2}$$

представляющие закон парности касательных напряжений. На основании соотношений (1.2) имеем вместо девяти только шесть независимых напряжений в каждой точке тела.

### 1.1.3. Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности.

Для исследования напряженного состояния в любой точке тела необходимо уметь определять напряжения на произвольной площадке, наклоненной к координатным осям. Положение в пространстве элементарной площадки  $abc$  (рис. 1.5), определяется нормалью  $\nu$ , направляющие косинусы которой

$$\cos(x, \nu) = l; \quad \cos(y, \nu) = m; \quad \cos(z, \nu) = n.$$

Наклонная площадка  $abc$  вместе с координатными площадками  $Oab$ ,  $Obc$ ,  $Oca$  образует элементарный тетраэдр. Обозначим площадь грани  $abc$  через  $dF$ ; тогда площади остальных граней тетраэдра определим как проекции площади грани  $abc$  на соответствующие координатные плоскости: пл.  $Obc = ldF$ , пл.  $Oca = mdF$ , пл.  $Oab = ndF$ . Напряжения на наклонной площадке  $abc$  обозначим  $X_\nu$ ,  $Y_\nu$ ,  $Z_\nu$ . Рассмотрим равновесие выделенного тетраэдра. Проектируя все силы на ось  $x$ , получаем

$$X_\nu dF - \sigma_x ldF - \tau_{xy} mdF - \tau_{xz} ndF + X dV = 0. \tag{1.3}$$

Здесь  $dV$  – объем тетраэдра,  $X$  – составляющая объемной силы. Величина  $dF$  имеет второй порядок малости, а  $dV$  – третий порядок. Поэтому последним членом в уравнении (1.3) можно пренебречь. Тогда получаем

$$X_\nu = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n.$$

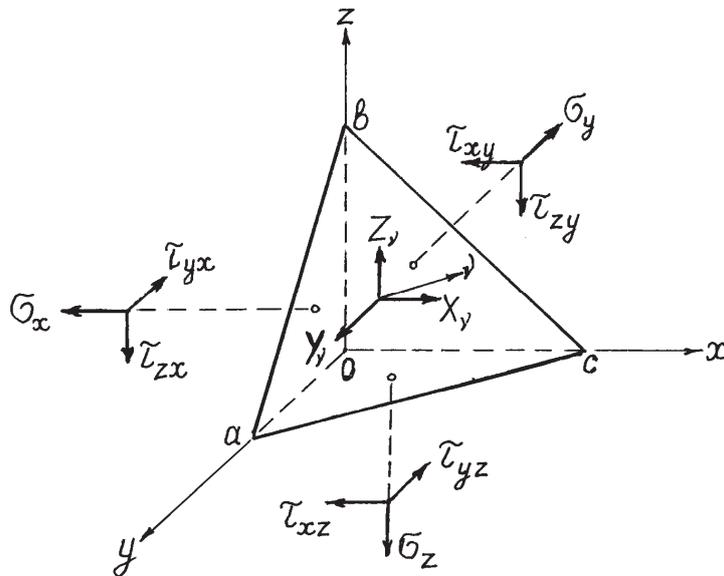


Рис. 1.5. Элементарный тетраэдр

Составляя уравнения проекций всех сил, действующих на тетраэдр *Oabc*, на оси *yi* и *z*, получаем еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующим трем уравнениям равновесия элементарного тетраэдра:

$$\begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) позволяют определить напряжения  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  на наклонной площадке с нормалью  $\mathbf{v}$ .

Если площадка *abc* совпадает с поверхностью тела, то напряжения  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  соответствуют составляющим поверхностных сил. В этом случае уравнения (1.4) называются условиями на поверхности тела. Они связывают внешние силы с внутренними. Удовлетворение уравнениям (1.1) и (1.4) является необходимым и достаточным условием равновесия всего тела под действием заданных внешних сил.

#### 1.1.4. Перемещения и деформации.

##### Уравнения неразрывности деформаций.

Рассмотрим твердое тело и внутри его некоторую точку *A* с координатами  $x, y, z$  (рис. 1.6). Под действием внешних сил точка *A* переместится в новое положение  $A_1$  с координатами  $x_1, y_1, z_1$ . Вектор  $AA_1$  называется вектором перемещения точки *A*. Различают два вида перемещений: перемеще-

ния всего тела как единого целого без его деформирования и перемещение, связанное с деформированием тела. Будем считать, что рассматриваемое тело закреплено так, чтобы оно не могло перемещаться как абсолютно твердое тело. Обозначим проекции вектора перемещения точки  $A$  на координатные оси через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Имеем

$$u = x_1 - x; \quad v = y_1 - y; \quad w = z_1 - z.$$

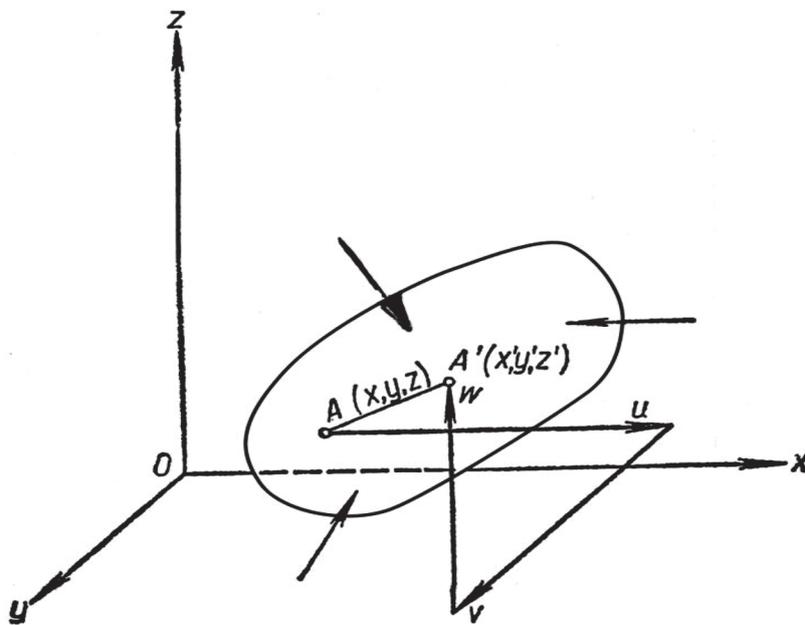


Рис.1.6. Возможное перемещение точки  $A$  тела

Величины  $u$ ,  $v$ ,  $w$  являются функциями координат:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z).$$

Так как разные точки тела имеют различные перемещения, то тело испытывает деформацию. Элементарный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , выделенный из упругого тела около точки  $A$ , вследствие различных перемещений его точек деформируется таким образом, что изменяется длина его ребер и искажаются первоначально прямые углы между гранями. На рис. 1.7 изображены два ребра этого параллелепипеда: ребро  $AB$ , параллельное оси  $x$ , и ребро  $AC$ , параллельное оси  $z$ . После деформирования точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  займут новые положения:  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ .

Проекция абсолютного удлинения ребра  $AB$  на ось  $x$

$$\Delta AB = \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси  $x$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

называется линейной деформацией по направлению оси  $x$ .

Аналогично найдем линейные деформации по направлениям осей  $y$  и  $z$ :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Далее, имеем

$$tg\alpha_1 = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right) - u}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

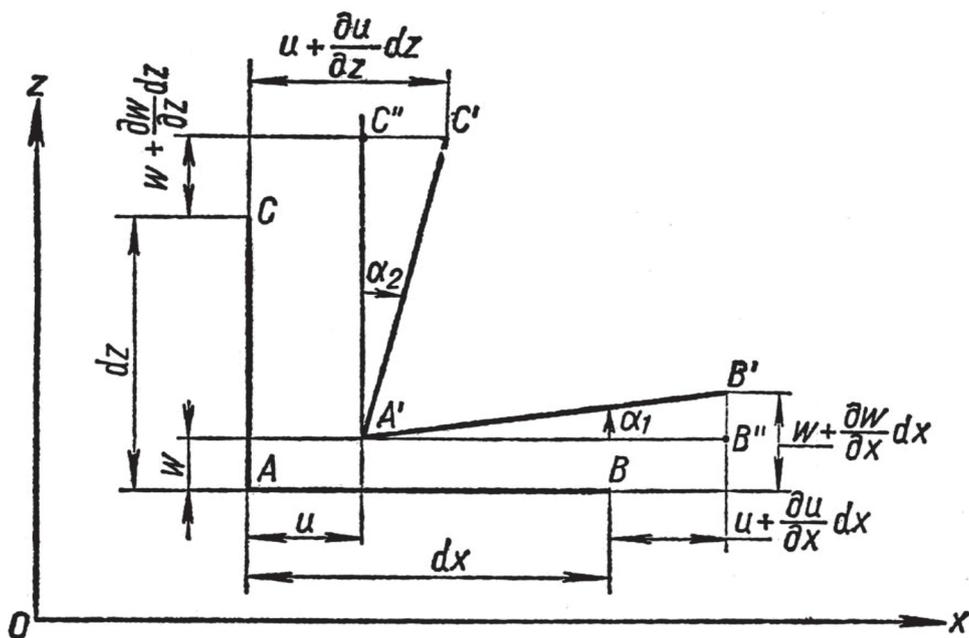


Рис. 1.7. Линейные деформации по направлениям осей

Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно положить  $tg\alpha_1 = \alpha_1$  и пренебречь величиной  $\varepsilon_x$  ввиду малости ее по сравнению с единицей. Тогда  $\alpha_1 = \partial w / \partial x$ . Аналогично находим угол поворота ребра  $AC$  в той же плоскости:  $\alpha_2 = \partial u / \partial z$ . Угол сдвига в плоскости  $xOz$ , т.е. искажение прямого угла  $BAC$ , называется угловой деформацией и определяется как сумма углов поворота ребер  $AB$  и  $AC$ :

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Аналогично найдем угловые деформации в двух других координатных плоскостях:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Таким образом, имеем шесть геометрических соотношений, связывающих деформации и перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражения (1.5) иногда называют уравнениями Коши. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям, а отрицательным – укорочения. Положительным угловым деформациям соответствует уменьшение углов между положительными направлениями осей, а отрицательным – увеличение тех же углов.

Рассмотрим элементарный параллелепипед объемом  $dV = dxdydz$ . После деформации его объем будет

$$dV_1 = (1 + \varepsilon_x)dx(1 + \varepsilon_y)dy(1 + \varepsilon_z)dz.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая произведениями линейных деформаций, получаем

$$dV_1 = (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dV.$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Окончательно, имеем

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.6)$$

По формуле (1.6) можно определить объемную деформацию  $\theta$ . Перемещение данной точки упругого тела определяется тремя функциями:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , а деформация в данной точке определяется шестью функциями:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Если будут заданы перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , то по формулам (1.5) можно однозначно определить все шесть деформаций. Однако шесть составляющих деформаций нельзя задать произвольно; между ними должны существовать какие-то зависимости. Число этих зависимостей равно шести, и делятся они на две группы.

**Первая группа.** Продифференцируем выражения для  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  из уравнений (1.5) следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}.$$

Складывая эти уравнения почленно, получаем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Делая в этом выражении круговую подстановку букв, получим два других равенства. Это приводит нас к первой группе зависимостей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

**Вторая группа.** Дифференцируем выражения для угловых деформаций из (1.5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

Изменим знаки первого из этих уравнений и затем их все почленно сложим:

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

Продифференцируем по  $x$  еще раз это уравнение и, замечая, что

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

Получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}.$$

Делая в этом уравнении круговую подстановку букв, получим еще два уравнения подобного вида. Это приводит нас ко второй группе зависимостей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Необходимость уравнений (1.7) и (1.8) можно обосновать и геометрически. Представим себе упругое тело разрезанным на малые параллелепипеды. Если каждый из этих параллелепипедов получит произвольные деформации, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное твердое тело: в некоторых точках после деформирования возникнут бесконечно малые разрывы. Уравнения (1.7) и (1.8) устанавливают такие зависимости между составляющими деформации, при удовлетворении которым тело и после деформирования остается сплошным, или непрерывным. Поэтому уравнения (1.7) и (1.8) можно рассматривать как следствие допущения о сплошности тела. Они называются уравнениями неразрывности деформаций Сен-Венана.

### 1.1.5. Тензоры напряжений и деформаций. Обобщенный закон Гука

Как установлено выше, девять составляющих напряжения полностью определяют напряженное состояние в точке. Девять составляющих  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$  определяют тензор напряжений и называются компонентами тензора напряжений. Тензор напряжений записывается в виде матрицы

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

На основании закона парности касательных напряжений компоненты тензора напряжений, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, поэтому тензор напряжений  $T_\sigma$  является симметричным.

Суммой двух тензоров является новый тензор, компоненты которого представляют собой сумму соответствующих компонентов слагаемых тензоров. Произведением тензора на скаляр является новый тензор, компоненты которого в  $\lambda$  раз больше соответствующих компонентов умножаемого тензора.

Тензор напряжений  $T_\sigma$  в каждой точке тела можно представить в виде суммы двух тензоров: шарового тензора напряжений  $T_\sigma^0$  и девиатора напряжений  $D_\sigma$ , т.е.

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma, \quad (1.9)$$

где

$$T_\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix};$$

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Аналогично тензору напряжений, для описания деформированного состояния в точке можно записать тензор деформаций

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Тензор деформаций  $T_{\varepsilon}$  можно разложить на шаровой тензор деформаций  $T_{\varepsilon}^0$  и девиатор деформаций  $D_{\varepsilon}$ , т.е.

$$T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^0 + D_{\varepsilon}, \quad (1.10)$$

где

$$T_{\varepsilon}^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix};$$

$$D_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{1}{3}\theta.$$

Разложение тензора напряжений и тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор (формулы (1.9) и (1.10)) имеет большое принципиальное значение при исследовании поведения упругих и пластических тел под нагрузкой.

При испытании стержня на растяжение установлена пропорциональность между нормальным напряжением и линейной деформацией в одном направлении:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (1.11)$$

называемая законом Гука. Здесь  $E$ — модуль продольной упругости. Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в продольном и поперечном направлениях:

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon, \quad (1.12)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

При чистом сдвиге существует пропорциональность между касательным напряжением и угловой деформацией

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (1.13)$$

где  $G$  – модуль сдвига.

Чтобы установить зависимости между составляющими деформации и напряжений при объемном напряженном состоянии, выделим из тела элементарный параллелепипед (рис. 1.3). Определим полное относительное удлинение ребра, параллельного напряжению  $\sigma_x$ . Используя принцип независимости действия сил и формулы (1.11) и (1.12), получаем

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E},$$

или

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Аналогично можно найти линейные деформации по направлениям  $y$  и  $z$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями, согласно закону Гука при сдвиге (1.13), можно представить независимо для каждой из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (1.15)$$

Формулы (1.14) и (1.15) выражают линейную зависимость между составляющими деформации и напряжений в изотропном упругом теле и называются законом Гука.

При решении задач часто бывает необходимо иметь выражения составляющих напряжений через составляющие деформаций. Складывая почленно формулы (1.14), находим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (1.16)$$

Так как

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

то формула (1.16) принимает вид

$$\theta = 3 \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_0.$$

Вводя модуль объемного расширения  $K$ , получаем:

$$\sigma_0 = K\theta; \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.17)$$

т.е. среднее напряжение  $\sigma_0$  в точке пропорционально объемной деформации.

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Величины  $\lambda$  и  $\mu$  называются постоянными Ламе. Видно, что  $\mu = G$ . Решая уравнения (1.14) относительно напряжений, находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из формул (1.15), имеем

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} \quad (1.19)$$

Формулы (1.18) и (1.19) называют обратной формой закона Гука-

Можно показать, что девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций, т.е.

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon \quad (1.20)$$

Так как девиатор деформаций характеризует только ту часть деформации, которая связана с изменением формы тела, к уравнению (1.20) следует добавить закон Гука для объемной деформации (1.17).

Таким образом, обобщенный закон Гука выражается двумя равенствами: тензорным (1.20) и скалярным (1.17) с двумя упругими постоянными  $2G$  и  $K$ . Зависимость (1.17) называется законом изменения объема, а зависимость (1.20) – законом изменения формы.

### 1.2.6. Задача теории упругости в перемещениях. Решение Папковича-Нейбера

Решение задач теории упругости можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные.

а) решение в перемещениях, когда за неизвестные приняты три компоненты вектора перемещений:  $u, v, w$ ;

б) решение в напряжениях, когда за неизвестные приняты шесть компонент тензора напряжений:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

Рассмотрим сначала решение в перемещениях. Возьмем первое дифференциальное уравнение равновесия (1.1)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \quad (1.21)$$

Из формул закона Гука (1.18) и (1.19) имеем

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}; \quad \tau_{xz} = \mu\gamma_{zx} \quad (1.22)$$

Далее используем выражения (1.5)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.23)$$

Подставляя (1.23) в (1.22), находим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (1.24)$$

С использованием (1.24), уравнение (1.21) принимает вид

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (1.25)$$

Введем обозначение

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Этот дифференциальный оператор называется оператором Лапласа над функцией  $u(x, y, z)$  и читается “набла два  $u$ ”. Тогда уравнение (1.25) можно переписать так:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + X = 0. \quad (1.26)$$

Так как  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ , то уравнение (1.26) принимает такой окончательный вид:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0.$$

Аналогично преобразуем и два других дифференциальных уравнения равновесия (1.1). Таким образом, получаем систему уравнений для решения задачи теории упругости в перемещениях:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Эти дифференциальные уравнения называются уравнениями Ламе. В случае необходимости можно и условия на поверхности тела (1.4) также выразить через перемещения.

Для отыскания компонент вектора перемещения  $u, v, w$  необходимо проинтегрировать три уравнения равновесия Ламе (1.27) и удовлетворить соответствующим условиям на поверхности тела.

Трудность отыскания частных решений системы уравнений теории упругости в перемещениях (1.27) обусловлена тем, что каждая из искомым функций  $u, v, w$  входит во все три уравнения (1.27). Эта трудность устранена в предложенном П.Ф. Папковичем и Г.Нейбером представлении перемещений через гармонические функции [102]. Этим достигается возможность использования хорошо известных частных решений уравнения Лапласа, а иногда даже удается привести задачу теории упругости, если не це-

ликом, то частично, к одной из классических задач теории гармонических функций.

Как известно, функция  $f(x, y, z)$  называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 f = 0.$$

Три уравнения (1.27) можно заменить одним векторным уравнением

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.28)$$

где  $\mathbf{u}$ -и вектор перемещений. В уравнении (1.28) предполагается, что объемная сила равна нулю.

Можно показать, что

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

где  $\nu$ - коэффициент Пуассона. Тогда уравнение (1.28) примет вид

$$\frac{1}{1 - 2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{u} = 0. \quad (1.29)$$

Решение уравнения (1.29) разыскиваем в такой форме:

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu)\mathbf{B} + \text{grad } \chi, \quad (1.30)$$

где  $\mathbf{B}$  - гармонический вектор, т.е.

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (1.31)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} &= 4(1 - \nu)\text{div } \mathbf{B} + \nabla^2 \chi, \\ \text{grad div } \mathbf{u} &= \text{grad}[4(1 - \nu)\text{div } \mathbf{B} + \nabla^2 \chi], \end{aligned}$$

так как

$$\text{div grad } \chi = \nabla^2 \chi.$$

Учитывая уравнение (1.31) приходим к соотношению

$$\text{grad}[2\text{div } \mathbf{B} + \nabla^2 \chi] = 0,$$

которому можно удовлетворить, подчинив выбор функции  $\chi$  уравнению

$$\nabla^2 \chi = -2 \operatorname{div} \mathbf{B}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\chi = -(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0), \quad (1.32)$$

где  $\mathbf{R}$  – вектор-радиус,  $B_0$  – произвольный гармонический скаляр.

Подставляя выражение (1.32) в формулу (1.30), получаем представление Папковича-Нейбера

$$\mathbf{u} = 4(1 - \nu)\mathbf{B} - \operatorname{grad}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{B} + B_0). \quad (1.33)$$

Формула (1.33) выражает вектор перемещений  $\mathbf{u}$  через четыре гармонические функции.

### 1.2.7. Задача теории упругости в напряжениях. Типы граничных условий на поверхности тела

Ограничимся рассмотрением случаев, когда объемные силы постоянны по всему объему тела или равны нулю. При решении задачи теории упругости в напряжениях за неизвестные принимают шесть компонентов тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Для их отыскания трех уравнений равновесия (1.1) недостаточно и поэтому еще нужно добавить уравнения неразрывности деформаций которые следует выразить через напряжения.

Подставляя в уравнения неразрывности деформаций (1.7) в (1.8) выражения для деформаций (1.14) и (1.15) и используя дифференциальные уравнения равновесия (1.1), после соответствующих преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} (1 + \nu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= 0, \\ \Theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Уравнения (1.34) называют уравнениями Бельтрами. Таким образом, при решении задачи теории упругости в напряжениях необходимо использовать три дифференциальных уравнения равновесия (1.1) и шесть уравнений неразрывности, выраженных через напряжения (1.34).

Решение задачи теории упругости сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных. К этим уравнениям необходимо еще добавить условия на поверхности тела. На поверхности тела могут быть заданы или внешние поверхностные силы или перемещения. В зависимости от этого различают три типа краевых задач.

Первая краевая задача – кинематическая. В этом случае задают уравнение поверхности и значения перемещений на этой поверхности.

Вторая краевая задача – статическая. В этом случае задают уравнение поверхности, направляющие косинусы нормали к поверхности и значения составляющих поверхностных нагрузок.

Третья краевая задача – смешанная. В этом случае на одной части поверхности тела задают кинематические условия, а на другой – статические.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

2.1. Плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются в тех случаях, когда задачу можно свести к отысканию функций только двух переменных, например  $x$  и  $y$ .

В упругом теле возникает плоская деформация, если перемещения происходят только параллельно одной из координатных плоскостей, например плоскости  $xOy$ :

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0. \quad (2.1)$$

Такие перемещения возникают в длинном призматическом или цилиндрическом теле, продольная ось которого параллельна оси  $Ox$ , при действии нагрузки, перпендикулярной этой оси и постоянной вдоль нее. Близкими к этому случаю являются задачи о длинной подпорной стенке или плотине (рис.2.1) при условии, что нагрузка не меняется вдоль оси  $Oz$ .

Подставляя перемещения (2.1) в уравнения (1.5), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y); & \varepsilon_z &= 0; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y); & \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y); & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

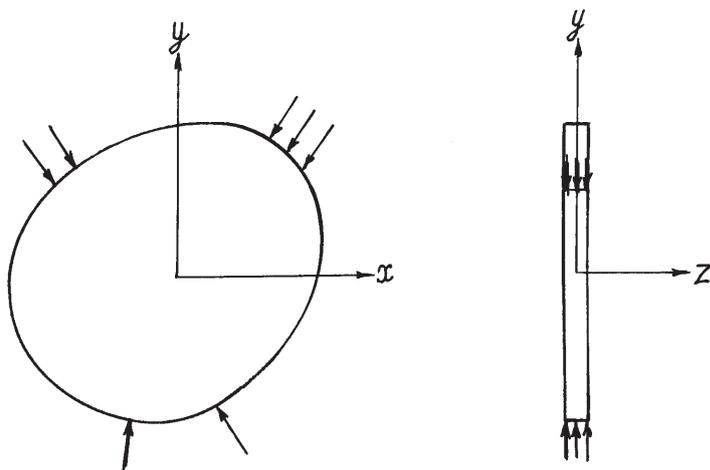


Рис. 2.1. Тонкая пластинка

В этом случае деформации возникают только в плоскостях, параллельных плоскости  $xOy$ . Так как  $\varepsilon_z = 0$ , то из третьей формулы (2.14) имеем

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в первые две формулы (2.14), находим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Формула для  $\gamma$ , остается прежней

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \quad (2.5)$$

Из анализа формул (2.2), (2.3) и (2.18), (2.19) следует, что

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y); & \sigma_y &= \sigma_y(x, y); & \sigma_z &= \sigma_z(x, y); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y); & \tau_{yz} &= 0; & \tau_{zx} &= 0.\end{aligned}$$

При плоской деформации основные уравнения теории упругости упрощаются. Из дифференциальных уравнений равновесия (2.1) остаются только два:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \quad (2.6)$$

Из условий на поверхности (2.4) остаются также только два:

$$X_\nu = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \quad Y_\nu = \tau_{xy} l + \sigma_y m. \quad (2.7)$$

Шесть геометрических соотношений Коши(2.5) сводятся к трем:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.8)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций(2.7), (2.8) остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (2.9)$$

Из шести формул закона Гука (2.14), (2.15) остаются только три, а именно формулы (2.4) и (2.5).

В задаче о тонкой пластинке, нагруженной по боковой поверхности силами, параллельными ее основаниям и равномерно распределенными по толщине (рис. 2.1), возможны упрощения, аналогичные упрощениям в за-

даче о плоской деформации. В этом случае, называемом обобщенным плоским напряженным состоянием, напряжения  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  на основаниях пластинки равны нулю. Так как пластинка тонкая, то можно считать, что эти напряжения равны нулю и по всему объему пластинки. По той же причине остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки, т.е. не зависящими от координаты  $z$ . Таким образом, возникает приблизительно следующее напряженное состояние:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y); \sigma_y = \sigma_y(x, y); \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y); \\ \sigma_z &= 0; \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0. \end{aligned}$$

На основании третьей формулы (2.14)

$$\varepsilon_z = \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y),$$

т.е. деформация  $\varepsilon_z$  не равна нулю.

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации – дифференциальные уравнения равновесия (2.6), условия на поверхности (2.7), геометрические соотношения Коши (2.8) и уравнение неразрывности деформаций (2.9) – сохраняют такой же вид и в задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии. А формулы закона Гука принимают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Таким образом, при решении задач о плоской деформации и обобщенном плоском напряженном состоянии можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединить обе задачи в одну: плоскую задачу теории упругости.

## 2.2. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений

Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций  $\sigma_x(x, y), \sigma_y(x, y), \tau_{xy}(x, y)$ . Для это-

го имеются два дифференциальных уравнения равновесия (2.6). К ним следует добавить уравнение неразрывности деформаций (2.9), заменив в нем деформации на напряжения по формулам (2.10). Имеем

$$\frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.11)$$

Первое уравнение равновесия (2.6) продифференцируем по  $x$ , а второе – по  $y$ , и почленно сложим. Считая объемные силы постоянными, найдем

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right).$$

Подставляя это выражение в (2.11), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или короче

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.12)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений в плоской задаче теории упругости есть гармоническая функция. Выражение (2.12) называется уравнением Леви. Оно выведено для обобщенного плоского напряженного состояния. В уравнение (2.12) не входят упругие постоянные: поэтому оно справедливо и в случае плоской деформации.

Следовательно, решение плоской задачи теории упругости при постоянных объемных силах сводится к интегрированию трех уравнений: двух уравнений равновесия (2.6) и уравнения неразрывности деформаций в напряжениях (2.12). Кроме того, необходимо удовлетворить и соответствующим условиям на поверхности тела.

Решение плоской задачи можно упростить, сведя ее к отысканию одной функции  $\varphi(x,y)$ , называемой функцией напряжений Эри. Ее выбирают так, чтобы дифференциальные уравнения равновесия обращались в тождества. Эти условия будут удовлетворены, если напряжения выразить через функцию Эри следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X_y - Y_x. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности деформаций (2.12), получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (2.14)$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (2.15)$$

Функция, подчиняющаяся уравнению (2.15), называется бигармонической, а уравнение (2.15) – бигармоническим уравнением. Напишем уравнение (2.14) в развернутом виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

или, раскрывая скобки

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.16)$$

Итак, плоская задача теории упругости сведена к отысканию одной бигармонической функции  $\varphi(x,y)$ , удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

### 2.3. Плоская задача теории упругости в полярных координатах. Основные уравнения

В полярной системе координат положение точки определяется двумя величинами: радиус-вектором  $r$  и полярным углом  $\theta$ . Рассмотрим основные уравнения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение неразрывности деформаций, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Выведем сначала дифференциальные уравнения равновесия. Для этого из пластинки, толщиной равной единице, выделим элемент  $abcd$  (рис. 2.2). Стороны этого элемента имеют размеры:

$$ab = cd = dr; \quad ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta. \quad (2.17)$$

На рис.2.2  $\sigma_r$  – радиальное нормальное напряжение,  $\sigma_\theta$  – тангенциальное нормальное напряжение,  $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$  – касательные напряжения;  $R$  и  $\Theta$  – составляющие объемной силы.

Составляя уравнения проекций всех сил на оси  $r$  и  $\theta$ , при этом, учитывая малость угла  $d\theta$ , приняв  $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$ , а  $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1$ , отбросив величины третьего порядка малости и разделив все члены на  $rdrd\theta$ , придем к

дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи теории упругости в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

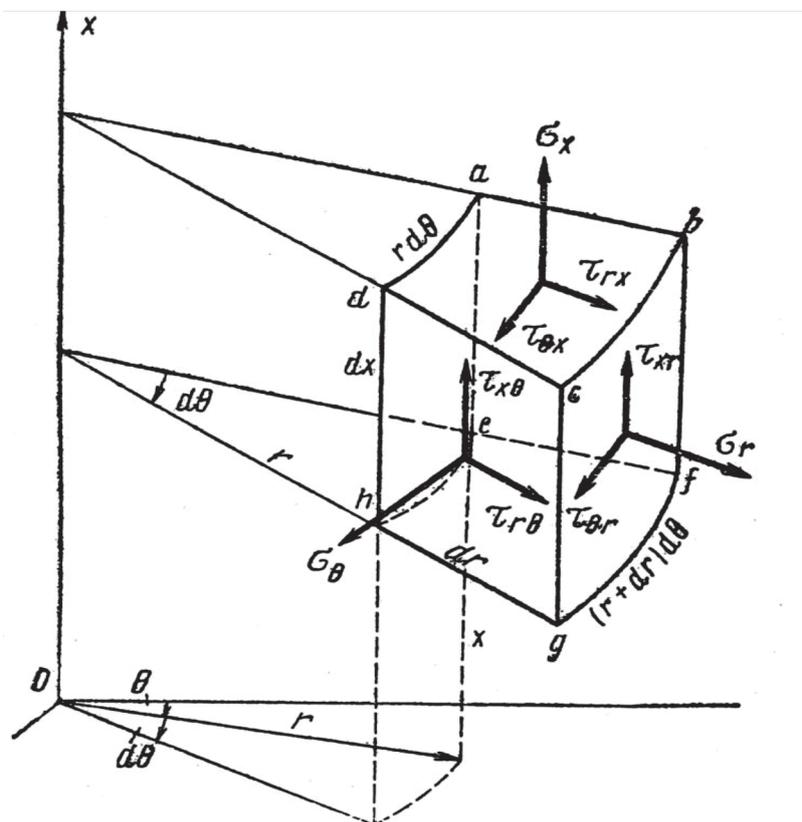


Рис. 2.2 Компоненты напряжений в полярной системе координат

Преобразуем к полярным координатам уравнение неразрывности деформаций (2.12). Имеем

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

В полярных координатах

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

Следовательно, уравнение неразрывности деформаций плоской задачи в полярных координатах имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (2.19)$$

так как  $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta$ .

При решении задач в полярных координатах также удобно вводить функцию напряжений  $\varphi(r, \theta)$ . Примем, что

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставляя выражения для напряжений из (2.20) в дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах при  $R = 0, \theta = 0$ , убеждаемся в том, что уравнения (2.18) удовлетворяются тождественно. Формулы (2.20) можно получить также из формул (2.13), используя формулы перехода от прямоугольной к полярной системе координат (при  $X = 0, Y = 0$ ).

Подставляя выражения (2.20) в уравнение неразрывности деформаций (2.19) приходим к уравнению неразрывности, выраженному через функцию напряжений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0. \quad (2.21)$$

## 2.5. Интегральное преобразование Фурье

Интегральным преобразованием называют преобразование, которое каждой функции  $f(x)$  ставит в соответствие новую функцию  $F(\xi)$  по формуле

$$F(\xi) = \int_A^B K(\xi, x) f(x) dx.$$

Исходная функция зависит от  $x$ , а результирующая от  $\xi$ . Функция  $K(\xi, x)$  называется ядром преобразования. Это основной элемент, отличающий одно преобразование от другого. Обычно ядро выбирают так, чтобы преобразование обладало некоторыми заданными свойствами. Пределы интегрирования зависят от вида преобразования.

Благодаря применению интегрального преобразования можно избавиться от частных производных по одной из независимых переменных. Значит, в преобразованном уравнении будет на одну переменную меньше, чем в исходном. Например, если применить интегральное преобразование Фурье по переменной  $x$  к уравнению в частных производных

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) = 0,$$

то получим обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной  $y$ . Затем, обыкновенное дифференциальное уравнение решается и к этому решению применяется обратное преобразование Фурье. В результате получаем решение исходной задачи.

С каждым прямым интегральным преобразованием связано обратное преобразование, которое восстанавливает первоначальную функцию из преобразованной. Прямое и обратное преобразования называют парой преобразований. Чаще всего применяются интегральные преобразования Фурье, Лапласа и Ханкеля.

Рассмотрим интегральное преобразование Фурье. Прямое преобразование Фурье имеет вид

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x} dx, \quad (2.22)$$

где функция  $F(\xi)$  называется трансформантой Фурье функции  $f(x)$ .

Обратное преобразование Фурье (формула обращения) имеет та кой вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\xi x} d\xi, \quad (2.23)$$

Среди свойств преобразования Фурье важную роль играет теорема о свертках.

Если  $F(\xi)$  и  $G(\xi)$  – трансформанты Фурье функций  $f(x)$  и  $g(x)$  то обращением произведения  $F(\xi)G(\xi)$  является свертка  $f * g$ ; другими словами

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(\xi)e^{-i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \eta)g(\eta)d\eta. \quad (2.24)$$

Доказательство теоремы о свертках. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(\xi)e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)e^{i\eta\xi} d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\xi(x-\eta)} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)f(x - \eta)d\eta. \end{aligned}$$

В случае приложения теории преобразования Фурье к задачам теории упругости желательно уметь выражать трансформанту Фурье функции  $d^r f/dx^r$  через трансформанту Фурье  $F$  функции  $f(x)$ . По определению трансформанты Фурье функции  $d^r f/dx^r$  будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r f}{dx^r} e^{i\xi x} dx = F^{(r)}(\xi). \quad (2.25)$$

Интегрируя левую часть формулы (2.25) по частям, получаем

$$F^{(r)}(\xi) = (-i\xi)^r F(\xi), \quad (2.26)$$

если

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{d^s f}{dx^s} \right) = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, r - 1)$$

В случае применения преобразования Фурье к решению конкретных задач приходится пользоваться таблицами трансформант Фурье [137].

#### 1.4. Особое интегральное уравнение с ядром Коши

Интегральными уравнениями принято называть уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла. Интегральное уравнение называется линейным, если в него неизвестная функция входит линейно. Линейное интегральное уравнение имеет вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy + f(x).$$

Здесь  $\varphi(x)$  – искомая функция;  $f(x)$ ,  $K(x, y)$  – известные функции;  $\lambda$  – параметр. Функция  $K(x, y)$  ( $a \leq x, y \leq b$ ) – называется ядром интегрального уравнения, функция  $f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) – свободным членом.

Интегральное уравнение первого рода характеризуется отсутствием члена, содержащего неизвестную функцию вне интеграла, т.е.

$$\int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (2.27)$$

Интегральные уравнения встречаются во многих задачах, как чисто математических, так и прикладных. Во многих прикладных задачах, в частности в теории упругости, ядро  $K(x, y)$  уравнения (4.17) имеет вид

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{x - y},$$

где функция  $H(x, y)$  – ограничена. В этом случае интеграл в уравнении (2.27) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Интеграл

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - y} dx \quad (a < x < b) \quad (2.28)$$

понимаемый как несобственный, не существует. Его называют особым (сингулярным) интегралом. Можно придать смысл интегралу (2.28), если ввести понятие главного значения особого интеграла по Коши:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - y} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{y-\varepsilon} \frac{\varphi(x) dx}{x - y} + \int_{y+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x) dx}{x - y} \right).$$

Сингулярным интегральным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция  $\varphi(x)$  входит под знак сингулярного интеграла, например

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x)}{x - y} dx = f(x). \quad (2.29)$$

Решение (обращение) особого интегрального уравнения с ядром Коши (2.29) имеет вид:

а) решение, не ограниченное на обоих концах

$$\varphi(x) = -\frac{1}{(a^2 - y^2)^{1/2}} \times \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} f(x)}{x - y} dx + a_0 \right], \quad (2.30)$$

б) решение, ограниченное на обоих концах

$$\varphi(x) = -(a^2 - y^2)^{1/2} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2} (x - y)}, \quad (2.31)$$

при условии

$$\int_{-a}^a \frac{\varphi(x) dx}{(a^2 - x^2)^{1/2}} = 0.$$

Интегралы в формулах (4.3)-(4.5) понимаются в смысле главного значения по Коши.

В случае применения особых интегральных уравнений к решению конкретных задач приходится пользоваться таблицами интегралов типа Коши [137]. Наиболее часто встречаются интегралы вида

$$I_n = \int_{-a}^a \frac{y^n (a^2 - x^2)^{1/2} dy}{x - y}.$$

При вычислении таких интегралов оказывается полезной следующая рекуррентная формула:

$$I_n = xI_{n-1} + \int_{-a}^a y^{n-1} (a^2 - x^2)^{1/2} dy.$$

В частности, при  $n = 1$ , имеем

$$\int_{-a}^a \frac{y(a^2 - x^2)^{1/2} dy}{x - y} = -\pi x^2 + \frac{\pi}{2} a^2.$$

**ОСНОВЫ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ**

Увеличение скоростей движения транспортных средств, интенсификация производственных процессов связаны с увеличением статических и динамических нагрузок, что предопределяет использование новых высокопрочных материалов, склонных к трещинообразованию. Традиционные методы проектирования, основанные на ограничении уровня максимальных расчетных напряжений с помощью коэффициента запаса прочности, не всегда могут исключить возможность хрупкого разрушения.

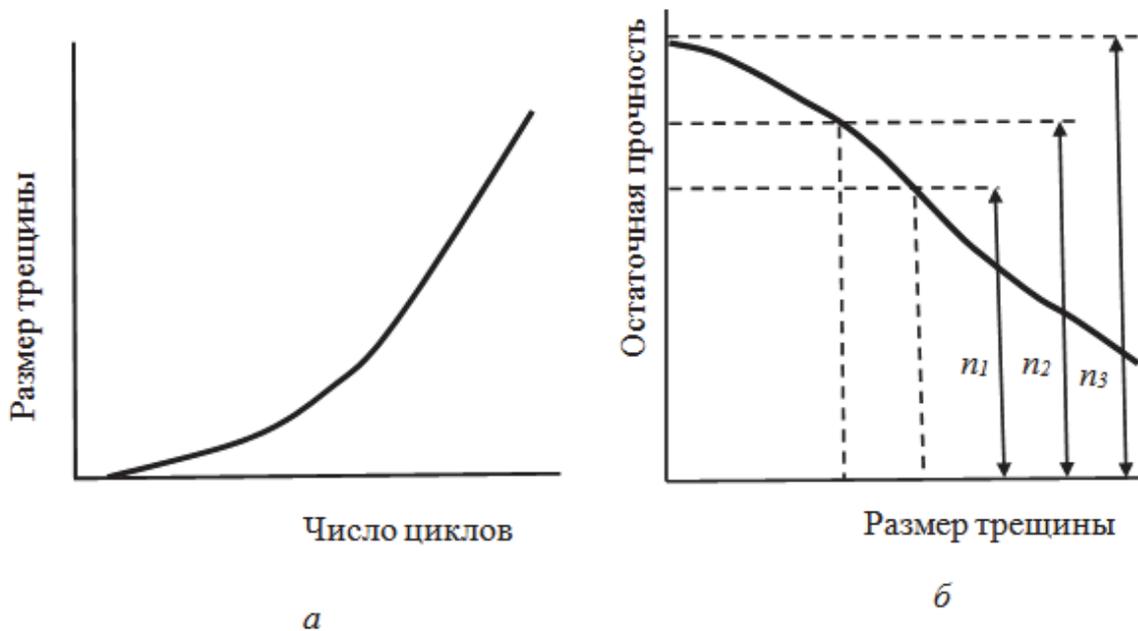


Рис.3.1. Развитие трещины во времени

Одним из современных средств повышения надежности машин при одновременном увеличении ресурса, снижении материалоемкости и улучшении экономической эффективности является проектирование и определение продолжительности эксплуатации по принципу безопасного повреждения. При этом учитывается наличие в деталях машин и элементах конструкций начальных металлургических технологических дефектов и образование в них трещин по мере накопления эксплуатационных повреждений.

Разработка и внедрение принципа безопасного повреждения возможны только при применении методов механики разрушения. Определение

напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, содержащих дефекты типа трещин, является наиболее ответственным и сложным этапом расчета на прочность. В соответствии с общепринятыми представлениями напряженно-деформированное состояние тела с трещиной полностью характеризуется величинами коэффициентов интенсивности напряжений. На их предварительном определении основаны практически все известные в настоящее время критерии хрупкого и квазихрупкого разрушения, а также зависимости, описывающие рост усталостных трещин.

Рассмотрим элемент конструкции, в котором имеется трещина. При действии циклических нагрузок или при совместном действии нагрузок и окружающей среды эта трещина будет расти. Развитие трещины во времени можно представить возрастающей кривой (рис.3.1,а). Из-за наличия трещины прочность конструкции уменьшается с увеличением ее размера (рис. 3.1, б). В результате разрушение может произойти при нормальных эксплуатационных нагрузках, причем выход из строя элемента конструкции происходит путем быстрого хрупкого разрушения, которое характеризуется нестабильным распространением трещины.

На рис. 3.1,б: П1 – прочность, соответствующая нормальной рабочей нагрузке; П2 – прочность, соответствующая ожидаемой максимальной рабочей нагрузке; П3 – расчетная прочность.

Известны многочисленные случаи хрупкого разрушения различных конструкций и деталей машин в процессе их эксплуатации. Это - аварии судов, мостов, турбогенераторов, сосудов высокого давления, газопроводов, реактивных самолетов и др.

Анализ прочности и выносливости детали, в которой присутствуют трещины, можно выполнить методами механики разрушения. Механика разрушения включает в себя ту часть науки о прочности материалов и конструкций, которая связана с изучением несущей способности тела с учетом начального распределения трещин, а также с изучением различных закономерностей развития трещин.

Таким образом, можно утверждать, что механика разрушения представляет собой совокупность методов, позволяющих обеспечивать безопасное использование машин и конструкции, содержащих трещиноподобные дефекты.

В последнее время методы механики разрушения стали широко применяться в различных областях промышленности и особенно в авиакосмической, атомной и энергетической, где при создании конструкций требуется обеспечение прочности и высокой сопротивляемости разрушению при наличии возможных дефектов и усталостных трещин. Большинство понятий механики разрушения применимо не только на этапе предварительного проектирования, но и при разработке методов проверочных испытаний и неразрушающего контроля, регламента технического обслуживания и ремонтов обнаруженных повреждений.

**Модель тела с трещинами. Виды деформации в области кончика трещины.** Общим для различных моделей развития трещин в твердых телах является то, что в начальный момент считается заданным некоторое распределение трещин конечной длины.

До 40-х годов XX в, было широко распространено мнение, что разрушение происходит почти мгновенно. В последующие десятилетия было установлено, что развитие трещины занимает значительный период, предшествующий разрушению. Экспериментально доказано, что при изменении внешних нагрузок в значительном диапазоне трещины если и развиваются, то устойчиво, не приводя к разрушению конструкцию, спроектированную с учетом имеющихся начальных трещин.

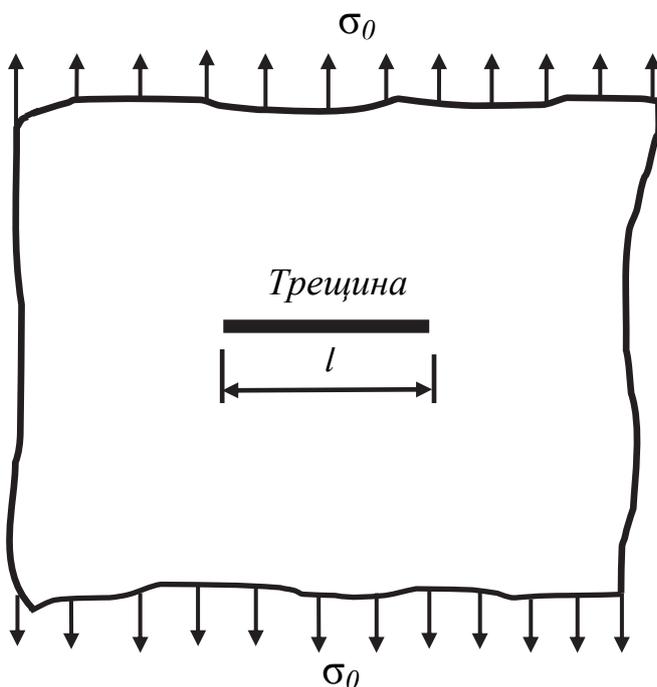


Рис. 3.2 Трещина в пластине

В 1920 г. А. Гриффитс, используя энергетический подход, получил условие разрушения бесконечной пластинки (рис. 3.2) с щелевой трещиной длиной  $l$  в таком виде:

$$\sigma_k = (4\gamma E/\pi l)^{1/2}. \quad (3.1)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\gamma$  – поверхностная энергия материала,  $\sigma_k$  – критическое напряжение, соответствующее возникновению неустойчивости трещины. Условие (3.1) определяет катастрофическое распространение трещины и справедливо для хрупких материалов типа стекла или керамики.

Пусть в теле имеется трещина некоторой длины  $l$ . Тогда с увеличением напряжения  $\sigma$  трещина не будет развиваться до тех пор, пока напряжение не достигнет некоторого значения  $\sigma_k$ , критического для данной трещины. Как только оно будет достигнуто, произойдет неустойчивое, спонтанное развитие трещины и тело разрушится.

Теория Гриффитса не позволяла учесть некоторые важные аспекты процесса разрушения. Так Е. Орован и Дж. Ирвин обнаружили, что “хрупкое” разрушение высокопрочных материалов сопровождается существенными пластическими деформациями в тонком слое вблизи поверхности трещины. Такое разрушение было названо квазихрупким.

В связи с этим Е. Орован и Дж. Ирвин выдвинули свою концепцию квазихрупкого разрушения. Ее основная идея состоит в учете энергии, не-

обходимой для пластической деформации. Это позволило значительно расширить пределы применимости теории Гриффитса.

Хрупким и квазихрупким разрушением не охватывается все разнообразие возможных видов разрушения. Возможны также упругопластическое, вязкое, вязкоупругое и др. виды разрушения.

Важнейший момент при изучении любого из этих видов разрушения – формулировка условия разрушения в кончике трещины. Наиболее просто это условие формулируется в теории квазихрупких трещин, когда пластическая деформация считается сосредоточенной в тонком слое вблизи поверхности трещины. Простейший вариант этого условия был предложен Дж. Ирвином, который в конце 50-х гг. нашего века, изучив оптическими методами напряженное состояние вокруг кончика трещины, обосновал понятие коэффициента интенсивности напряжений. Особое значение исследования Ирвина заключается в том, что оно открыло путь для анализа упругих напряжений в телах с трещинами.

Трещины хрупкого разрушения в твердых телах можно рассматривать как поверхности разрыва вектора смещений. Ирвин отметил, что имеется

три вида независимых кинематических движений верхней и нижней поверхности трещины по отношению друг к другу. Эти три основных типа деформации приведены на рис 3.3, на котором изображены локальные смещения элемента, содержащего фронт трещины. Указанные три типа деформации являются необходимыми и достаточными для описания всех возможных видов поведения трещины в наиболее общем случае распределения упругих напряжений.

Типы движений для трещины, лежащей в плоскости  $xz$ , можно описать следующим образом.

Случай *a* – нормальный отрыв. Нормальный отрыв характеризуется такими перемещениями поверхностей трещины, при которых последние стремятся разойтись симметрично относительно плоскости, в которой была расположена трещина до деформации.

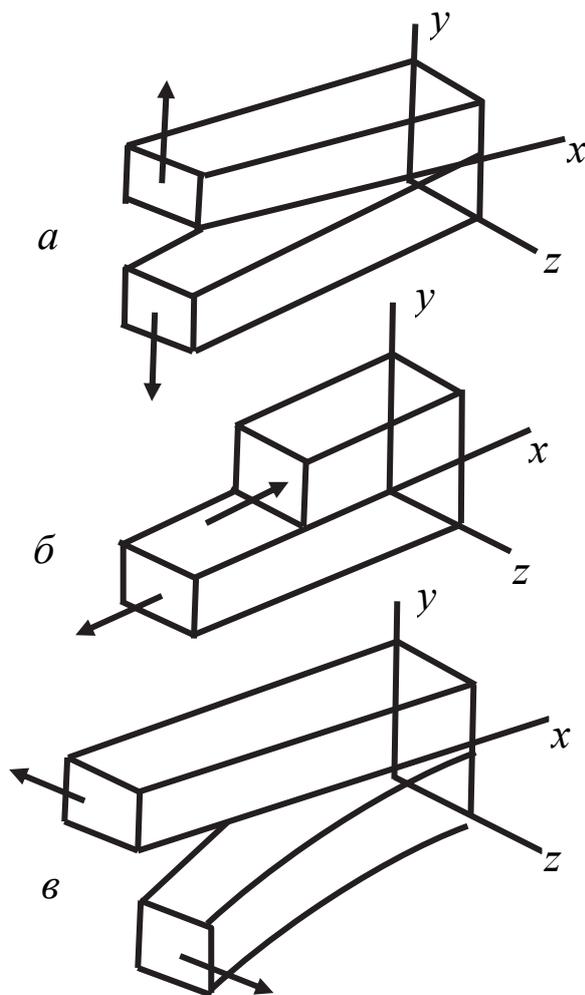


Рис. 3.3. Виды деформации трещины

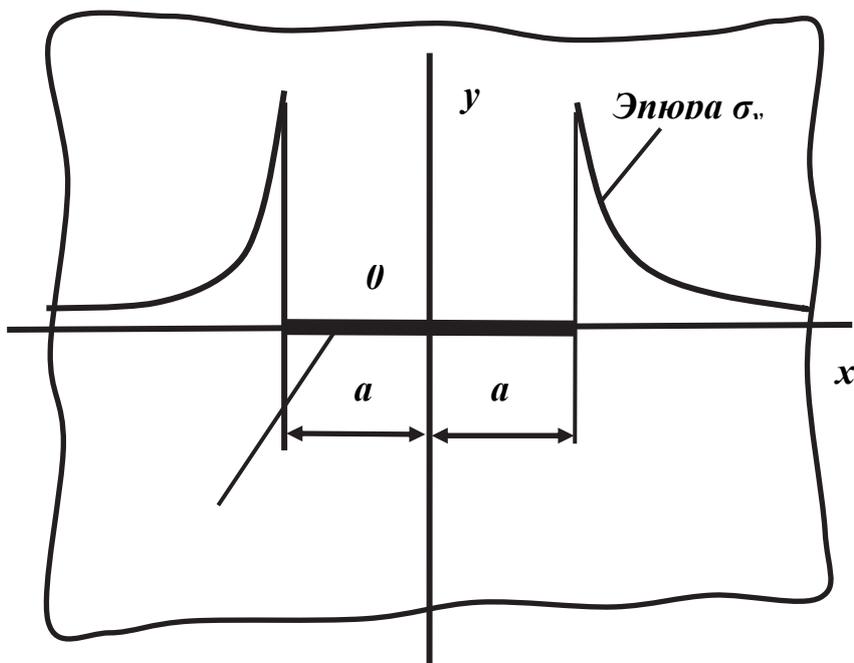


Рис. 3.4 Градиент напряжения возле кончика трещины

Случай б – поперечный сдвиг. Поперечный сдвиг представляет собой локальную деформацию, при которой поверхности трещины скользят одна по другой в одной плоскости, но в противоположных направлениях.

Случай в – продольный сдвиг. В этом случае поверхности трещины скользят одна по другой в направлении параллельном линии фронта трещины.

Естественно, что каждое из трех движений поверхностей трещины, изображенных на рис. 3.3, связано с соответствующим полем напряжений в окрестности кончика трещины.

**Определение перемещений и напряжений для упругого тела с трещиной.** Рассмотрим неограниченное упругое тело в условиях плоской задачи теории упругости. В теле имеется узкая внутренняя трещина (разрез) длиной  $2a$  (рис. 3.4). Пусть трещина расширяется под действием давления, величина которого вдоль трещины может изменяться. Считаем, что существует симметрия относительно оси  $x$ . Поэтому, задача сводится к нахождению перемещений и напряжений в упругой полуплоскости  $y \geq 0$ . Граничные условия в данном случае имеют вид (при  $y = 0$ ) [137]

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ \sigma_y &= -p(x), & |x| \leq a; \\ v &= 0, & |x| \leq a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Связь между трансформантами Фурье перемещения границы полуплоскости и давления дается формулой (2.56) в приложении 1. Эту формулу перепишем в таком виде [137]:

$$\bar{p}(\xi) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} |\xi| \bar{v}(\xi, 0).$$

Так как  $\bar{p}(\xi)$

$$|\xi| = (i \operatorname{sign} \xi)(-i\xi),$$

то получаем

$$\bar{p}(\xi) = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} (i \operatorname{sign} \xi)(-i\xi) \bar{v}(\xi, 0). \quad (3.3)$$

Формула (3.3) удовлетворяет первому граничному условию (3.2). Применяя к соотношению (3.3) формулу обращения для преобразования Фурье (4.35), получаем

$$p(x) = \frac{E}{4\pi(1 - \nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} (i \operatorname{sign} \xi)(-i\xi) \bar{v}(\xi, 0) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Воспользовавшись теоремой о свертках к соотношению (3.3) и таблицей трансформант Фурье [137], находим

$$-p(x) = \frac{E}{2\pi(1 - \nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(\eta, 0)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{\eta - x}$$

Удовлетворяя третьему граничному условию (3.2), имеем

$$p(x) = \frac{E}{2\pi(1 - \nu^2)} \int_{-a}^a \frac{\partial v(\eta, 0)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{\eta - x}$$

Отсюда получаем особое интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial v'(\eta, 0) d\eta}{\eta - x} = \frac{\pi(1 - \nu^2)}{E} p(x). \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4), не ограниченное на обоих концах, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} &= \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{1}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(a^2 - t^2)^{1/2} p(t)}{t - x} dt + a_0 \right], |x| < a. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Интеграл в формуле (3.5) понимается в смысле главного значения по Коши.

В качестве примера рассмотрим случай, когда к берегам трещины приложено равномерно распределенное давление, т.е.  $p(x) = p = \text{const}$  при  $|x| < a$ . В этом случае решение (3.5) принимает вид

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{(a_0 - px)}{(a^2 - x^2)^{1/2}}, \quad |x| < a.$$

Отсюда, находим

$$v(x, 0) = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \left[ a_0 \arcsin \frac{x}{a} + p(a^2 - x^2)^{1/2} \right], \quad |x| \leq a,$$

Так как при  $x = \pm a v(\pm a, 0) = 0$ , то  $a_0 = 0$ . Следовательно, окончательно имеем

$$v(x, 0) = \frac{2p(1 - \nu^2)}{E} (a^2 - x^2)^{1/2}, \quad |x| \leq a. \quad (3.6)$$

Приняв

$$b = \frac{2(1 - \nu^2)pa}{E}$$

приведем выражение (3.6) к виду

$$x^2/a^2 + \nu^2/b^2 = 1.$$

Отсюда следует, что под действием равномерного давления трещина расширяется и принимает эллиптическую форму. Уравнение (3.6) описывает форму трещины, которую она принимает при действии равномерно распределенного давления.

Определив функцию  $v(x, 0)$  можно теперь найти напряжение  $\sigma_y(x, 0)$ . Учитывая, что  $\sigma_y(x, 0) = -p(x)$  и используя формулу (3.4), получаем

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{E}{2\pi(1 - \nu^2)} \int_{-a}^a \frac{v'(\eta, 0)d\eta}{\eta - x}.$$

Подставляя сюда формулу (3.6), имеем

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{p}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\eta d\eta}{(a^2 - x^2)^{1/2}(\eta - x)}.$$

Вычисляя этот интеграл, находим

$$\sigma_y(x, 0) = -p \text{ при } |x| < a,$$

$$\sigma_y(x, 0) = p \left[ \frac{|x|}{(a^2 - x^2)^{1/2}} - 1 \right] \text{ при } |x| > a. \quad (3.7)$$

Эпюра напряжения  $\sigma_y$ , подсчитанного по формуле (3.7), стремится к бесконечности при подходе к кончику трещины, т.е. имеет особенность в кончике. Для установления характера особенности нормального напряжения у кончика трещины найдем асимптотическое представление для  $\sigma_y$  при  $x \rightarrow a + 0$ . Устремляя в формуле (3.7)  $x$  к  $a + 0$  и отбрасывая постоянное слагаемое, находим

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{pa^{1/2}}{2^{1/2}(x-a)^{1/2}}, \quad x \rightarrow a + 0. \quad (3.8)$$

Определив напряжение  $\sigma_y(x, 0)$  и перемещение  $v(x, 0)$  можно перейти к нахождению перемещений и напряжений в любой точке упругой полуплоскости. Эти напряжения и перемещения можно определить по формулам [137]

для напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) (1 - |\xi|y) e^{-|\xi|y - i\xi x} d\xi, \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) (1 + |\xi|y) e^{-|\xi|y - i\xi x} d\xi, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \xi y e^{-|\xi|y - i\xi x} d\xi, \end{aligned} \quad (3.9)$$

и перемещений

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1 + \nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\bar{p}(\xi)}{\xi} \times \\ &\times [(1 - 2\nu) - |\xi|y] e^{-|\xi|y - i\xi x} d\xi, \\ v(x, y) &= -\frac{1 + \nu}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}(\xi)}{|\xi|} \times \\ &\times [2(1 - \nu) + |\xi|y] e^{-|\xi|y - i\xi x} d\xi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\bar{p}(\xi)$  – трансформанта Фурье функции давления  $p(x)$  на границе полуплоскости  $y = 0$ .

Однако, в эти формулы входит функция  $\bar{p}(\xi)$  которая пока неизвестна. На основании соотношения (3.3), имеем

$$\bar{p}(\xi) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} |\xi| \bar{v}(\xi, 0). \quad (3.11)$$

Далее, по формуле (3.30) получаем

$$\bar{v}(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) e^{i\xi x} dx.$$

Подставляя сюда формулу (3.6), имеем

$$\bar{v}(\xi, 0) = \frac{2p(1-\nu^2)}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 - x^2)^{1/2} e^{i\xi x} dx.$$

Воспользовавшись таблицей трансформант Фурье [118], находим

$$\bar{v}(\xi, 0) = \frac{2p(1-\nu^2)}{E} J_1(a, \xi),$$

где  $J_1(a, \xi)$  – функция Бесселя 1-го рода.

Подставляя это выражение в формулу (3.9), окончательно имеем

$$\bar{p}(\xi) = \text{пар sign } \xi J_1(a, \xi). \quad (3.12)$$

Подставляя выражение (3.12) в формулы (3.9) и (3.10), можно определить напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости.

Полученные выше результаты относятся к случаю плоской деформации. Если заменить  $\nu$  на  $\nu/(1+\nu)$ , то получим формулы, соответствующие случаю обобщенного плоского напряженного состояния.

**Коэффициент интенсивности напряжений. Поля напряжений и перемещений вблизи кончика трещины.** Если ввести обозначение

$$K_1 = p a^{1/2}, \quad (3.13)$$

то формула (3.8) примет вид

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_1}{(2\pi)^{1/2} (x-a)^{1/2}}, \quad x \rightarrow a + 0. \quad (3.14)$$

Величина  $K_1$  называется коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) нормального отрыва. Формула (3.11) определяет КИН для плоскости с одиночной трещиной, когда к берегам трещины приложено равномерное давление  $p$ , или когда плоскость подвергается равномерному рас-

тяжению по нормали к линии трещины. В данном случае КИН зависит от давления и размера трещины. Можно показать, что формула (3.12) сохраняется и в тех случаях, когда трещина находится в упругом теле конечных размеров, причем давление  $p(x)$  не обязательно должно быть постоянным. Однако, в этих случаях выражение для  $K_1$  будет отличаться от формулы (3.11). Для конечного тела КИН зависит и от его размеров.

Понятие КИН оказалось весьма полезным в линейной механике разрушения.

КИН можно находить как по известным напряжениям, так и перемещениям. Из формулы (3.12) находим

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} [(2\pi)^{1/2} (x - a)^{1/2} \sigma_y(x, 0)]. \quad (3.15)$$

Формула (3.13) позволяет определить КИН нормального отрыва по известным напряжениям. Величину  $K_1$  можно найти, если известны перемещения:

$$K_1 = \frac{(2\pi)^{1/2} \mu}{1 + \chi} \lim_{x \rightarrow a+0} \left[ \frac{v(x, +0) - v(x, -0)}{(a - x)^{1/2}} \right], \quad (3.16)$$

$$K_1 = -\frac{2\mu}{1 + \chi} \lim_{x \rightarrow a+0} \times \\ \times \left\{ (2\pi)^{1/2} (a - x)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} [v(x, +0) - v(x, -0)] \right\}, \quad (3.17)$$

где  $\chi = 3 - 4\nu$  для плоской деформации и  $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для обобщенного плоского напряженного состояния.

Имеются формулы, подобные формулам (3.13)-(3.15), для определения КИН поперечного сдвига  $K_2$  и продольного сдвига  $K_3$ .

Разрушение теснейшим образом связано с теми процессами, которые протекают в окрестности кончика трещины. Поэтому большое значение имеют формулы для определения напряжений и перемещений вблизи кончика трещины (рис. 3.5). В случае нормального отрыва имеем:

$$u = \frac{K_1 (2r)^{1/2}}{8\pi^{1/2} \mu} \left[ (2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \dots, \quad (3.18)$$

$$v = \frac{K_1 (2r)^{1/2}}{8\pi^{1/2} \mu} \left[ (2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \dots,$$

$$\sigma_x = \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots,$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \dots, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_1}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \dots\end{aligned}\quad (3.19)$$

В условиях плоской деформации  $w = 0$ ,

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),$$

тогда как в условиях обобщенного плоского напряженного состояния

$$\sigma_z = 0.$$

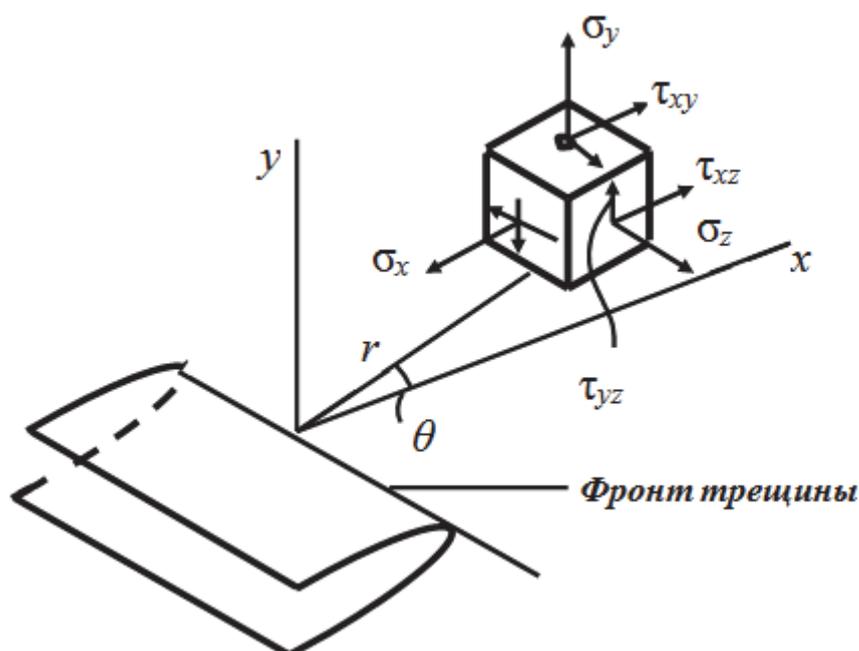


Рис. 3.5. Компоненты вектора напряжений возле фронта трещины

Выражения, аналогичные формулам (3.18), (3.19), имеют место в случае поперечного и продольного сдвигов.

В формулах (3.18), (3.19) отброшены члены более высокого порядка относительно переменной  $r$ .

Из формул (3.19) следует, что напряжения при  $r \rightarrow 0$  стремятся к бесконечности. Это является следствием математического приближения линеаризации, связанной с удовлетворением граничных условий на недеформированной поверхности трещины (разреза) и использования закона Гука. Как известно, закон Гука становится неверным при больших внут-

ренных напряжениях в материале, которые возникают при сильной концентрации напряжений в окрестности краев трещины. Поэтому формулы (3.18), (3.19) перестают отвечать действительности при очень малых  $r < r_0$ . Однако, как показывает опыт и более детальный анализ, при достаточно малых  $r > r_0$  эти формулы могут служить для асимптотической оценки свойств поля напряжений в окрестности краев трещины.

Наиболее просто найти асимптотическое представление для перемещений в полярной системе координат. Поэтому, в окрестности кончика трещины для точки с координатами  $(r, \theta)$  (рис. 3.5), полагаем

$$u_r = r^{\frac{1}{2}} f_1(\theta); \quad u_\theta = r^{\frac{1}{2}} f_2(\theta), \quad (3.20)$$

где  $u_r, u_\theta$  – перемещения в радиальном и окружном направлениях соответственно. Далее, дифференциальные уравнения равновесия в полярных координатах (3.18) нужно выразить через перемещения  $u_r, u_\theta$  и затем подставить в эти уравнения выражения (3.20). В результате получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$ . Решая эти уравнения и удовлетворяя граничным условиям на берегах трещины и на ее продолжении, найдем функции  $f_1(\theta), f_2(\theta)$  и тем самым определим перемещения  $u_r, u_\theta$ . Зная перемещения  $u_r, u_\theta$  можно найти перемещения  $u, v$  по формулам:

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta, \\ v &= u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta. \end{aligned}$$

В результате получим выражения (3.18).

Имея асимптотические представления для перемещений можно найти соответствующие представления и для напряжений. В результате придем к формулам (3.19).

**Условие разрушения Ирвина.** Критическое напряжение и критическая длина трещины. Для упрощения задачи ограничимся рассмотрением случая нормального отрыва. Напряженное состояние у фронта трещины для упругого тела полностью определяется коэффициентом интенсивности напряжений  $K_1$ . Поэтому эта величина лежит в основе силовых критериев линейной механики разрушения. Первый критерий такого типа предложил Ирвин для разрушения квазихрупких тел.

Критерий Ирвина формулируется так: трещина начинает распространяться в упругом теле, когда значение коэффициента интенсивности напряжений достигнет некоторого критического для данного материала значения.

Значение  $K_{Ic}$ , при достижении которого трещина будет распространяться неустойчиво, является константой материала, называемой вязкостью раз-

рушения или критическим коэффициентом интенсивности напряжений. Критический коэффициент интенсивности напряжений при статическом приложении нагрузки в условиях плоской деформации обозначается через  $K_{1C}$ , а при обобщенном плоском напряженном состоянии – через  $K_C$ .

Таким образом, условие разрушения для тела с трещиной имеет вид

$$K_1 = K_{1C} \text{ или } K_1 = K_C. \quad (3.21)$$

Следовательно, трещина, имеющаяся в детали или элементе конструкции расти не будет, если  $K_1 < K_{1C}$  или  $K_1 < K_C$ .

Коэффициент интенсивности  $K_1$  зависит от нагрузки, размера трещины и геометрии детали. Он определяется, как правило, теоретически, используя методы теории упругости. Величины  $K_{1C}$  и  $K_C$  определяются экспериментально и являются постоянными материала. Величины  $K_{1C}$  и  $K_C$  зависят также от температуры и скорости деформации, а  $K_C$  зависит кроме того от толщины пластины.

Главная цель механики разрушения состоит в определении сопротивления распространению трещины материала по испытаниям специального образца для того, чтобы оценить сопротивление разрушению конструкции.

Широкий круг возможных причин разрушения можно в значительной мере нейтрализовать выбором материала, обладающего повышенной стойкостью к разрушению. Ясно, что чем больше значение  $K_{1C}$  (или  $K_C$ ), тем выше напряжение, при котором разрушится конструкция и тем больше размер критического дефекта, определяющий условия нестабильного роста трещины. Поэтому сравнение материалов и технологических способов их изготовления по соответствующим величинам  $K_{1C}$  (или  $K_C$ ) может обеспечить достаточно надежный выбор материала для конкретного применения. Чем больше вязкость разрушения, тем до большей длины может вырасти трещина при данном рабочем напряжении.

Повышение надежности и работоспособности материала с трещиной может быть достигнуто путем рационального выбора конструкций, предусматривающего затруднение для распространения трещины от мест возможного ее зарождения. Например, представляется целесообразным создание на пути развития трещины плоских щелей или плоских включений более мягкого материала, которые будут “гасить” распространяющуюся трещину.

Оптимальным конструктивным решением детали в общем случае будет такое, когда деталь как единое целое состоит из ряда элементов, геометрические размеры которых в направлении наиболее вероятного распространения трещины будут меньше критической длины трещины, зависящей от максимального рабочего напряжения. Конструктор может выбрать для детали соответствующий материал и конструктивно ее оформить так, чтобы затруднить продвижение трещины.

При эксплуатации изделия важно, чтобы нестабильный рост трещины начинался при как можно большей длине трещины.

Методы механики разрушения позволяют определить критическую длину трещины, при которой начинается нестабильный рост ее (при заданном значении рабочего напряжения). Можно также найти критическое напряжение для элемента конструкции с трещиной данной длины как напряжение, при котором происходит немедленное разрушение. Запас прочности элемента конструкции определяется как отношение критического напряжения (при наличии трещины заданной длины) к рабочему напряжению.

Рассмотрим задачу об определении критического напряжения и критической длины трещины.

В качестве примера рассмотрим полосу конечной ширины (рис. 3.7). Для нее

$$K_1 = \sigma(\pi a)^{\frac{1}{2}} F_1(a), \quad \alpha = \frac{2a}{W}.$$

В момент начала нестабильного роста трещины, из условия (3.21),

$$K_1 = K_{1c} \text{ или } K_1 = K_c$$

Следовательно, в этот момент

$$K_{1c} = \sigma_k(\pi a)^{\frac{1}{2}} F_1(a).$$

Отсюда находим

$$\sigma_k = \frac{K_{1c}}{(\pi a)^{\frac{1}{2}} F_1(a)}. \quad (3.22)$$

По формуле (3.22) можно найти критическое напряжение  $\sigma_k$  для полосы (рис. 3.6) с трещиной данной длины при плоской деформации.

Аналогично, при обобщенном плоском напряженном состоянии

$$\sigma_k = \frac{K_c}{(\pi a)^{\frac{1}{2}} F_1(a)}. \quad (3.23)$$

Напряжения, действующие у вершины трещины, превосходят предел текучести материала до того, как достигается критическое состояние вследствие образования пластической зоны, в которой теряют силу законы упругости и наблюдается упрочнение материала. Наличие зоны, в которой материал пластически течет, приводит при оценке момента разрушения к образованию ошибки.

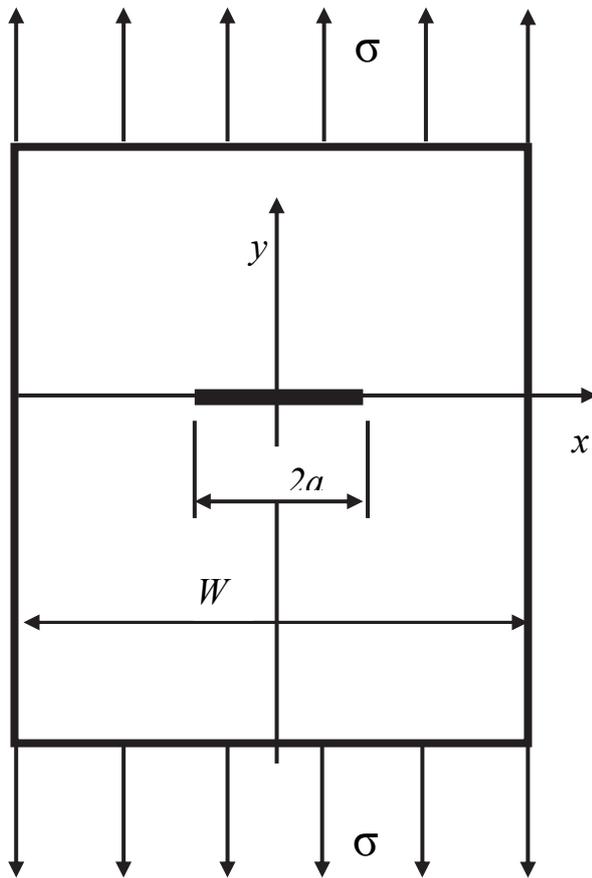


Рис. 3.6. Пластина с трещиной

Влиянием пластического течения в ряде случаев можно пренебречь или внести поправку на образование пластической зоны, если размеры этой зоны существенно малы по сравнению с длиной трещины и толщиной материала.

Размер пластической зоны у вершины трещины можно определить из второй формулы (3.19), полагая  $\sigma_y = \sigma_{0.2}$  и  $\theta = 0$ . Тогда получим

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_1}{\sigma_{0.2}} \right)^2.$$

В момент разрушения  $K_1 = K_C$  и предельный размер пластической зоны будет равен

$$r_y^* = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_C}{\sigma_{0.2}} \right)^2. \quad (3.24)$$

Здесь  $\sigma_{0.2}$  – условный предел текучести материала.

По формуле (3.24) можно определить предельный размер пластической зоны в случае обобщенного плоского напряженного состояния. Для случая плоской деформации, предельный размер пластической зоны

$$r_y^* = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_C}{\sigma_{0.2}} \right)^2. \quad (3.25)$$

На рис. 3.7 показано расположение пластической зоны у кончика трещины.

Для учета влияния пластической зоны в линейной механике разрушения Ирвин предложил считать, что вершина трещины лежит на расстоянии  $r_y$  от границы фактического разделения материала.

При определении критического напряжения  $\sigma_k$  в случае плоской деформации по формуле (3.25), поправкой на пластическую зону  $r_{1y}^*$  можно пренебречь, так как она незначительна (согласно с (3.25)).

В случае обобщенного плоского напряженного состояния поправку на размер пластической зоны следует учитывать. С учетом поправки на пластическую зону формула (3.22) принимает вид

$$\sigma_k = \frac{K_C}{\pi^{1/2}(a + r_y^*)^{1/2} F_1(a^*)}, \quad a^* = \frac{2(a + r_y^*)^{1/2}}{W}, \quad (3.26)$$

где  $r_y^*$  определяется соотношением (3.24).

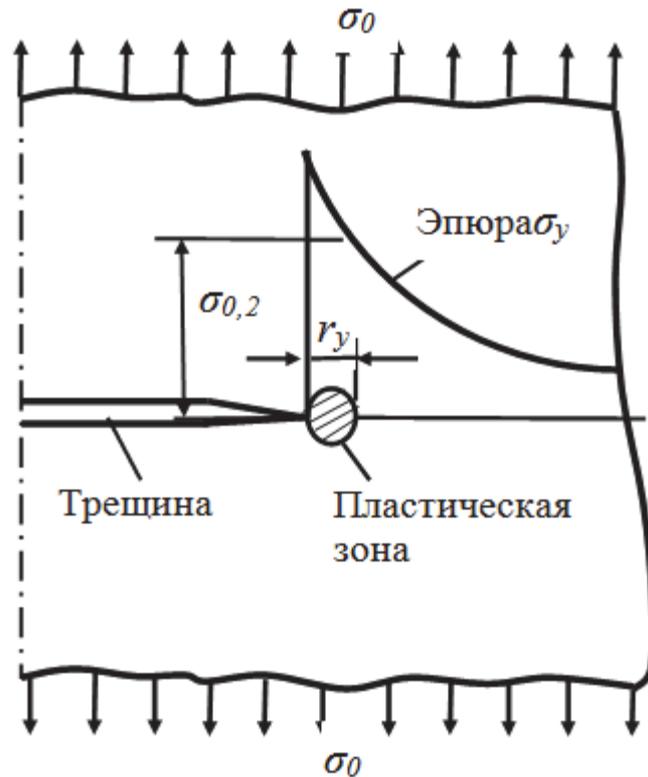


Рис. 3.7 Пластическая зона в кончике трещины

**Экспериментальное определение  $K_C$  и  $K_{1C}$ .** В условие разрушения Ирвина (3.26) входят величины  $K_C$  и  $K_{1C}$  которые являются постоянными материала и определяются экспериментально. Поэтому следует рассмотреть вопрос об определении этих величин.

Измеренные значения величины  $K_C$  существенно отличаются при изменении толщины образцов, и это отличие связано с характером разрушения, определяемым по внешнему виду поверхности излома. Например, поверхность разрушения плоского образца с трещиной состоит из двух частей. Края такого образца содержат губы среза, тогда как средняя часть разрушается хрупко по плоской поверхности, перпендикулярной оси приложения нагрузки (рис. 3.8,а). С увеличением толщины полосы  $t$  возрастает доля хрупкого разрушения и уменьшается величина параметра  $K_C$  (рис. 3.8,б). По мере увеличения толщины полосы состояние материала все более приближается к состоянию, определяющему прямой вид излома, а зна-

чение параметра  $K_C$  приближается к предельному минимальному значению  $K_{1C}$  (рис.3.8.б), которое полагается константой материала. Если полоса с трещиной имеет излом в виде среза, вблизи трещины сохраняется условие плоского напряженного состояния. Условию плоского напряженного состояния соответствует  $r_y/t \geq 1$ . Это условие характеризуется распространением пластической зоны на всю толщину образца, наличием плоскости излома под углом  $45^\circ$  к направлению действующих нагрузок и отсутствием элементов хрупкого взлома. При этом достигается наибольшая прочность материала.

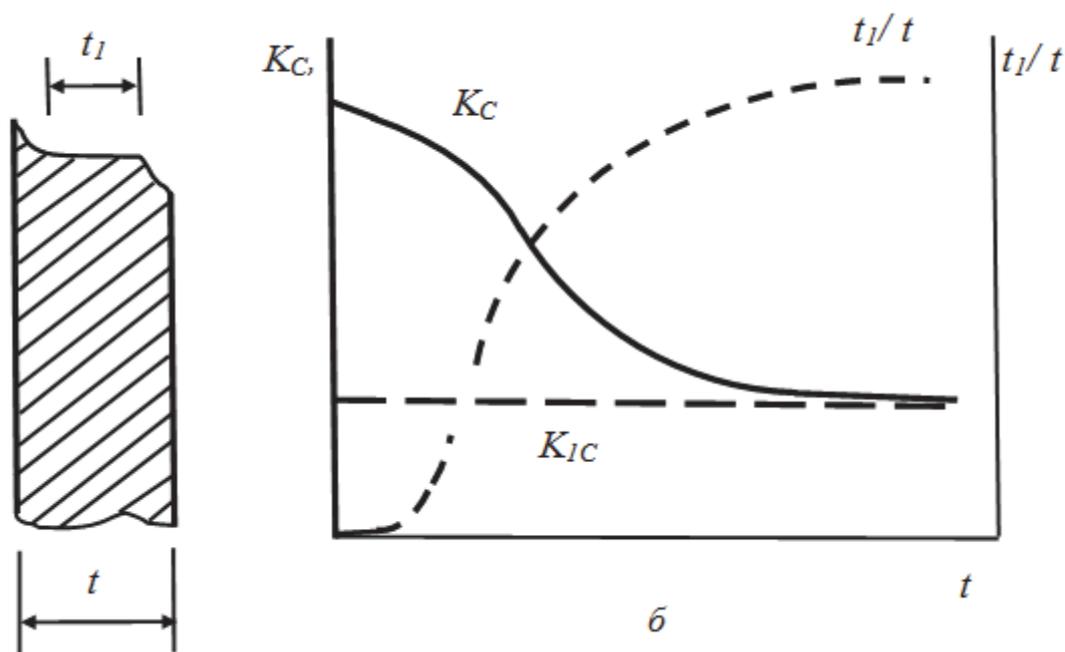


Рис. 3.8 Зависимость параметра  $K_C$  от толщины  $t$  пластины

Условие плоской деформации имеет вид  $r_y/t \leq 1/5\pi$ , оно обычно выполняется для деталей и образцов крупных сечений. Для таких образцов характерны полностью хрупкий излом без среза и наименьшая прочность.

Величину  $K_C$  можно использовать для расчетных оценок прочности конструкций лишь тогда, когда образцы из исследуемого материала имеют толщину, равную толщине элементов конструкций.

Коэффициент интенсивности напряжений имеет размерность  $\text{Н}/\text{м}^{3/2}$ .

Величины  $K_C$  и  $K_{1C}$  с одной стороны характеризуют способность материала сопротивляться развитию трещины, а с другой – входят в условия разрушения, устанавливающие ту величину коэффициента интенсивности напряжений, при которой наступает быстрый, неконтролируемый рост трещины.

Характеристики трещиностойкости  $K_C$ ,  $K_{1C}$  определяют по результатам однократных статических испытаний специальных образцов, с предва-

рительно нанесенной усталостной трещиной, на трехточечный изгиб, внецентренное или осевое растяжение. Для листового материала толщиной от 2 до 10 мм рекомендуется использовать плоские образцы преимущественно с центральной трещиной (рис. 3.9) при осевом растяжении. При этом рекомендуются следующие соотношения размеров:  $l = (0,15...0,25)b$ ;  $B = (1,25...1,6)b$ ;  $L = 3b$ ;  $L = (0,15...0,25)b$ ;  $R = 0,3b$  [29].

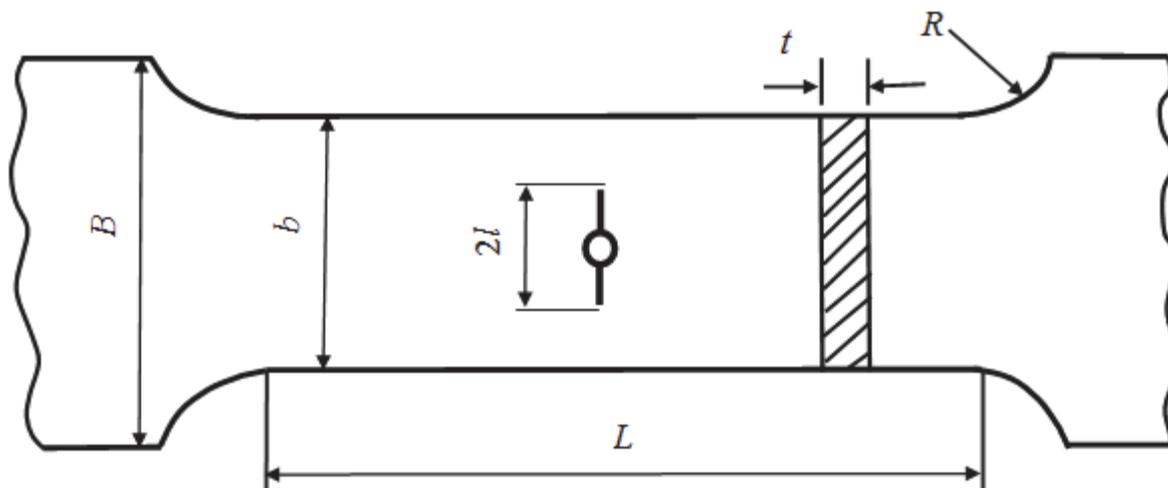


Рис. 3.9 Образец для испытания

В процессе испытаний осуществляют запись диаграмм  $P-V$  (сила  $P$ , смещение берегов надреза  $V$ ),  $P-f$  (сила  $P$ , перемещение  $f$  по оси действия силы) и температуры образца. При разрушении образца на этих диаграммах отмечают точки, соответствующие наступлению разрушения.

В источнике [36] подробно описывается процесс проведения испытаний и обработки экспериментальных данных с целью определения характеристик трещиностойкости  $K_C$  и  $K_{1C}$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ОДНОНАПРАВЛЕННОГО АРМИРОВАННОГО СЛОЯ  
ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА**

На этапе проектирования при выборе нового материала (волокна или связующего) может возникнуть необходимость определения упругих характеристик монослоя по характеристикам волокна и связующего с учетом технологии изготовления полимерного композитного материала (ПКМ).

На первом этапе для определения упругих характеристик монослоя, следуя работе [134], выбираются оси упругой симметрии однонаправленного армированного пластика в соответствии с рисунком 4.1.а. В случае трансверсально-изотропной арматуры модуль упругости однонаправленного армированного слоя в направлении армирования определяется по следующей зависимости [134]

$$E_1 = \nu E_{BZ} + (1 - \nu)E_C + \eta E_C, \quad (4.1)$$

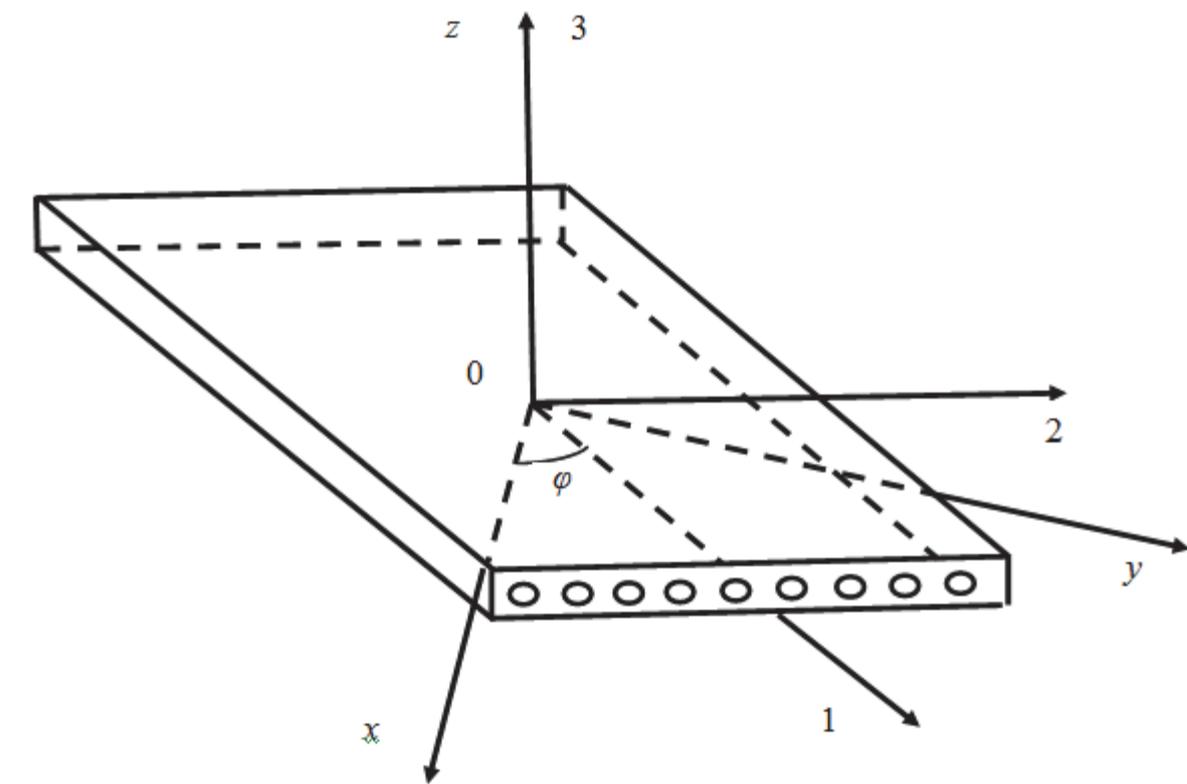
Здесь индекс 1 соответствует направлению показанному на рисунке 4.1, а, б; индексы  $B$  и  $C$  соответствуют волокнам и связующему;  $\nu$ —относительное объемное содержание волокон. Если  $\nu_C \approx \nu_{Brz}$ , т.е. коэффициенты Пуассона компонентов практически одинаковы, то  $\eta = 0$  и зависимость (4.1) принимает форму, которая соответствует правилу смеси [62]:

$$E_1 = \nu E_{BZ} + (1 - \nu)E_C. \quad (4.2)$$

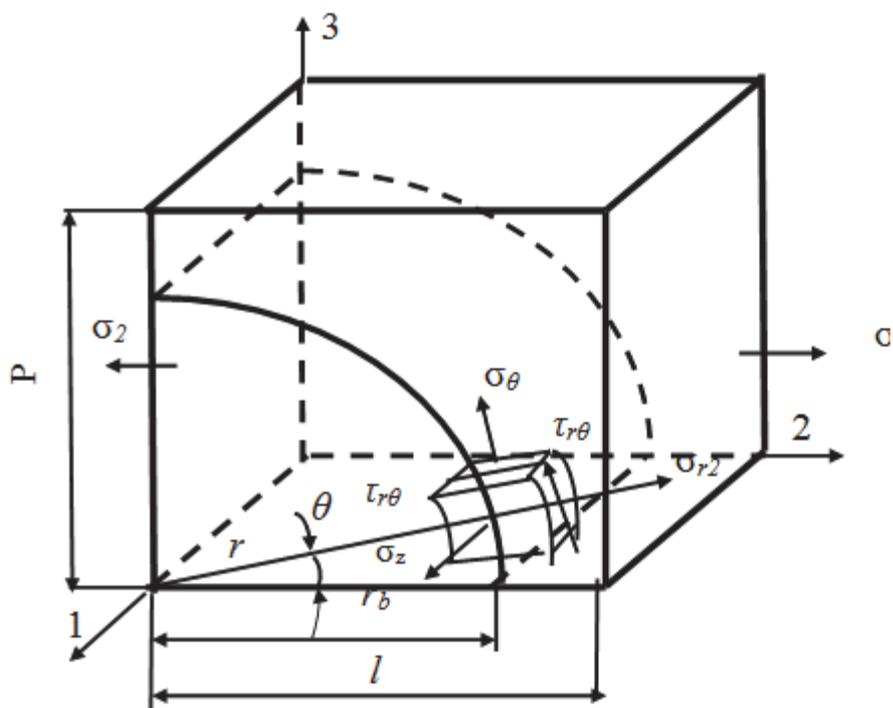
Анализ зависимости коэффициента  $\eta$  от характеристик компонентов показывает, что влияние поперечных эффектов, возникающих в результате различия коэффициентов Пуассона полимерного связующего и волокон, на модуль упругости пластика  $E_l$  в самых экстремальных случаях не превышает 2%. Следовательно, с достаточной для практики точностью модуль упругости однонаправленного армированных пластиков в направлении армирования определяется зависимостью (4.2).

Если  $E_{BZ} \gg E_C$ , то для практически применяемых объемных содержаний (долей) волокон зависимость (4.2) может быть заменена более простой:

$$E_1 = \nu E_{BZ}.$$



a)



б)

Рис. 4.1 Направление осей в однонаправленном слое КМ (а) и в расчетной модели его упаковки (б)

Анализ, проведенный в [156], показывает, что коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$  практически не зависит ни от модулей упругости компонентов, ни от геометрии строения однонаправленного армированного пластика, а определяется лишь объемным содержанием волокон и коэффициентами Пуассона компонентов. Поэтому для практического применения рекомендуется следующая зависимость:

$$\nu_{12} = (1 - \nu)\nu_c + \nu\nu_{BZr}. \quad (4.3)$$

Если деформативные свойства однонаправленного армированных пластиков в направлении армирования в основном определяется жесткостью волокон и практически не зависят от геометрии упаковки волокон, то на упругие свойства пластиков в направлении, перпендикулярном направлению армирования, существенно влияют как упругие свойства полимерного связующего, так и геометрия распределения волокон в поперечном сечении материала.

Определение модуля поперечной упругости  $E_2$  является наиболее сложной задачей определения упругих свойств композита по заданным характеристикам компонентов. При использовании метода тонких слоев для двоякопериодической расчетной модели предложено [134] применять следующую формулу для определения  $E_2$  с учетом геометрии упаковки волокон

$$E_2 = \left[ \frac{r_B}{p} J + \left( 1 - \frac{1}{1 - \nu_c^2} \right) \right] E_c, \quad (4.4)$$

где

$$J = \frac{1}{bE_c} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \right],$$

$$a = \frac{1 - \nu_c^2}{E_c}, \quad b = \frac{r_B}{l} \left[ \frac{1 - \nu_{BrZ}\nu_{BZr}}{E_{Br}} - a \right].$$

Параметры  $p$  и  $l$  определяют вид упаковки волокон и так же, как и диаметр волокон  $2r_B$  и объемное содержание волокон  $\nu$ , являются величинами заданными [62].

В случае прямоугольной упаковки волокон должно быть задано соотношение  $p/l = d$ . Тогда из соотношения площади поперечного сечения волокна и всей площади сечения получим следующие зависимости:

$$\frac{r_B}{l} = 1,14\sqrt{\nu d} \quad \frac{r_B}{p} = 1,14\sqrt{\frac{\nu}{d}}.$$

В случае квадратной упаковке волокон  $l = p$ , тогда эти зависимости принимают вид:

$$\frac{r_B}{l} = \frac{r_B}{p} = 1,14\sqrt{v}.$$

При гексагональном расположении волокон, когда  $p = 0,5\sqrt{3}l$ , справедливо соотношение

$$\frac{r_B}{l} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}v}{\pi}} = 1,05\sqrt{v}; \quad \frac{r_B}{p} = 1,21\sqrt{v}.$$

Коэффициент Пуассона  $\nu_{21}$  определяется по следующей известной зависимости:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}. \quad (4.5)$$

Для определения модуля продольного сдвига используют метод, основанный на расчетной модели, содержащей неограниченное число слоев бесконечно малой толщины [178]. Этот метод не учитывает влияния взаимодействия между поверхностями смежных слоев. Полученная приближенная формула для определения продольного модуля сдвига однонаправленного армированного пластика, учитывающая объемное содержание и вид упаковки волокон и упругие свойства компонентов, имеет вид

$$\sigma_{12} = \left[ 1 - \frac{r_b}{p} + \frac{r_b}{p} k \left( \frac{2k}{\sqrt{k^2-1}} \arctg \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \sigma_c, \quad (4.6)$$

где

$$k = \frac{1}{\frac{r_b}{l} \left( 1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_{Brz}} \right)}.$$

Таким образом для определения упругих характеристик монослоя по характеристикам его компонентов (наполнителя и связующего) необходимо использовать формулы (4.2) – (4.6) с учетом соответствующей (прямоугольной, квадратной и гексагональной) упаковки волокон, выбираемой в зависимости от характеристик компонентов и технологии изготовления пакета в целом. Полученные таким образом упругие характеристики монослоя используются для определения характеристик пакета.

*Расчет упругих характеристик ПКМ по характеристикам монослоя.* Каждый индивидуальный слой (монослой) состоит из однонаправленных волокон, определяющих направление слоя, и матрицы, обеспечивающей нормальную и трансверсальную жесткость слоя. Такой монослой является ортотропным, поскольку обладает двумя взаимно перпендикулярными

осями симметрии. Его характерной особенностью является то, что нормальные напряжения, действующие вдоль осей ортотропии, не вызывают деформаций сдвига, а касательные напряжения – удлинений. Закон Гука, описывающий соотношение напряжение-деформация для однонаправленного монослоя при плоском напряженном состоянии имеет вид [161]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & 0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  – напряжения, приложенные к монослою;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$  – деформации монослоя;  $C_{kl}^0$  – коэффициенты матрицы жесткости, которые определяются так:

$$\begin{aligned} C_{11}^0 &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\ C_{12}^0 &= \frac{E_1\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \\ C_{22}^0 &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad C_{66}^0 = G_{12}, \end{aligned}$$

где  $E_1, E_2, G_{12}$  – продольный, поперечный (трансверсальный) и сдвиговой модули упругости монослоя;  $\nu_{12}$  – главный коэффициент Пуассона;  $\nu_{21}$  – второстепенный коэффициент Пуассона, определяемый из соотношения Максвелла:

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1,$$

Если нагружение монослоя происходит не вдоль оси ориентации, то он находится в состоянии послойного нагружения в составе пакета ПКМ. Тогда закон Гука принимает вид [161]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^\alpha & C_{12}^\alpha & C_{16}^\alpha \\ C_{21}^\alpha & C_{22}^\alpha & C_{26}^\alpha \\ C_{61}^\alpha & C_{62}^\alpha & C_{66}^\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{aligned} C_{11}^\alpha &= V_1 + V_2 \cos 2\alpha + V_3 \cos 4\alpha; \\ C_{12}^\alpha &= C_{21}^\alpha = V_1 - 2V_4 - V_3 \cos 4\alpha; \\ C_{16}^\alpha &= 0,5V_2 \sin 2\alpha + V_3 \sin 4\alpha; \\ C_{22}^\alpha &= V_1 - V_2 \cos 2\alpha + V_3 \cos 4\alpha; \\ C_{26}^\alpha &= 0,5V_2 \sin 2\alpha + V_3 \sin 4\alpha; \\ C_{66}^\alpha &= V_4 - V_3 \cos 4\alpha; \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – угол ориентации монослоя (рис. 4.3 а).

Здесь коэффициенты  $V_1, V_2, V_3, V_4$  определяются так:

$$\begin{aligned} V_1 &= (3C_{11}^0 + 2C_{12}^0 + 3C_{22}^0 + 4C_{66}^0)/8; \\ V_2 &= (C_{11}^0 + 2C_{12}^0)/2; \\ V_3 &= (C_{11}^0 - 2C_{12}^0 + 3C_{22}^0 - 4C_{66}^0)/8; \\ V_4 &= (C_{11}^0 - 2C_{12}^0 + C_{22}^0 + 4C_{66}^0)/8. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $V_1$  и  $V_4$  характеризуют средние жесткости монослоя при растяжении и сдвиге, а коэффициенты  $V_2$  и  $V_3$  характеризуют степень анизотропии материала.

$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  – для углов армирования  $0^\circ$  и  $90^\circ$ ;

$V_1, V_2, V_3, V_4$  – для углов армирования  $\pm a^\circ$ .

При рассмотрении всего пакета монослоев ортотропной пластины уравнения связи напряжений и деформаций многослойного материала будут иметь такой же вид, как и для ортотропного монослоя:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sum_{i=1}^{2n} C_{11}^i \frac{\delta_m}{S}; \\ C_{12} = C_{21} &= \sum_{i=1}^{2n} C_{12}^i \frac{\delta_m}{S}; \\ C_{22} &= \sum_{i=1}^{2n} C_{22}^i \frac{\delta_m}{S}; \\ C_{66} &= \sum_{i=1}^{2n} C_{66}^i \frac{\delta_m}{S}; \end{aligned}$$

где  $\delta_m$  – толщина монослоя;  $n$  – число монослоев относительно срединной плоскости.

Из расчета следует, что порядок чередования слоев в пакете многослойного материала не влияет на его определяемые упругие характеристики.

Технические постоянные упругости пакета монослоев ортотропной пластины определяются так:

$$E_x = C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}; \quad E_y = C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}};$$

$$G_{xy} = C_{66}; \quad \nu_{xy} = \frac{C_{12}}{C_{22}};$$

где  $\nu_{xy}$  – определяется из известного соотношения Максвелла.

Таким образом, поведение пакета монослоев при плоском напряженно-деформируемом состоянии определяется, как и для монослоя, четырьмя независимыми упругими постоянными.

*Научное издание*

**Казаринов Юрий Иванович**

**ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
С ВЫРЕЗАМИ И ПОВРЕЖДЕНИЯМИ**

*Монография*

*В авторской редакции*

Подписано в печать 21.07.2017. Формат 60x90 1/16.  
Печ. л. 11,75. Тираж 500 экз. Заказ № 979.

Библиотечно-издательский комплекс  
федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Тюменский индустриальный университет»  
625000, г. Тюмень, ул. Володарского, 38.

Типография библиотечно-издательского комплекса.  
625039, г. Тюмень, ул. Киевская, 52.