


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ

Председатель КСН  
 Ю.В. Ваганов

« 30 » 08 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины/модуля: Математика  
(наименование дисциплины)

направление подготовки/специальность: 21.03.01  
(код, наименование)

направленность/специализация: Нефтегазовое дело  
(наименование)

профиль: \_\_\_\_\_

- 1 «Бурение нефтяных и газовых скважин»,
- 2 «Строительство и обслуживание систем транспорта, хранения и сбыта углеводородов»,
- 3 «Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти»

форма обучения: очная, очно-заочная, заочная  
(очная, очно-заочная, заочная)

Рабочая программа разработана в соответствии с утвержденным учебным планом от 22. 04.2019 г. и требованиями ОПОП 21.03.01 Нефтегазовое дело к результатам освоения дисциплины/модуля

Рабочая программа рассмотрена на заседании кафедры естественно-научных и гуманитарных дисциплин  
Протокол № 1 от «30» 08. 2019г.

Заведующий кафедрой ЕНГД \_\_\_\_\_ Л.К. Иляшенко

СОГЛАСОВАНО:

И.о. зав. выпускающей кафедрой НД \_\_\_\_\_ Р.Д. Татлыев

« 30 » 08. 2019 г.

Рабочую программу разработал:

Л.К. Иляшенко, зав. кафедрой ЕНГД, к.п.н., доцент  
(И.О. Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание)

\_\_\_\_\_

### 1. Цели и задачи освоения дисциплины

Дисциплина «Математика» имеет своей целью: формирование личности обучающихся, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, а также обучение методам обработки и анализа результатов экспериментальных данных. Дисциплина «Математика» закладывает фундамент последующего обучения в магистратуре, аспирантуре.

Основными задачами преподавания дисциплины являются: научить обучающихся использовать основные понятия математики и их взаимосвязь в других дисциплинах, приемы исследования и решения математически формализованных задач и возможность их использования при решении прикладных задач.

### 2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина относится к дисциплинам обязательной части, формируемой участниками образовательных отношений учебного плана.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины являются:

знание основных принципов, понятий и законов математики, возможности применения математических законов в конкретных областях науки и техники;

умения формулировать задачу в математических терминах и находить пути ее решения; самостоятельно расширять математические знания;

владение математическими методами для обработки результатов практической деятельности и анализа полученных результатов.

Содержание дисциплины служит основой для освоения дисциплин «Физика», «Химия», «Программирование», «Электротехника», «Метрология и стандартизация».

Бакалавр, независимо от профиля подготовки, должен понимать и использовать в своей практической деятельности базовые концепции и методы, развитые в современном естествознании.

### 3. Результаты обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплин направлен на формирование следующих компетенций:

Таблица 3.1

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции (ИДК)	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)
ОПК-1: Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания	ОПК-1.4 Представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й).	Знать: представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений (ОПК-1.34)
		Уметь: применять математический аппарат при решении физических явлений (ОПК-1.У4)
		Владеть: навыками в применении математического аппарата при исследовании профессионально-ориентированных задач (ОПК-1.В4)

	<p>ОПК-1.6 Решение инженерных задач с помощью математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии</p>	<p>Знать: теоретические основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии (ОПК-1.36)</p> <p>Уметь: применять знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач (ОПК-1.У6)</p> <p>Владеть: математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач (ОПК-1.В6)</p>
	<p>ОПК-1.7 Решение уравнений, описывающих основные физические процессы, с применением методов линейной алгебры и математического анализа</p>	<p>Знать: методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы(ОПК-1.37)</p> <p>Уметь: применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы (ОПК-1.У7)</p> <p>Владеть: методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы (ОПК-1.В7)</p>
	<p>ОПК-1.8 Обработка расчетных и экспериментальных данных вероятностно-статистическими методами</p>	<p>Знать: вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных (ОПК-1.38)</p> <p>Уметь: применять вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных (ОПК-1.У8)</p> <p>Владеть: вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных (ОПК-1.В8)</p>
<p>ОПК-2: Способен участвовать в проектировании технических объектов, систем и технологических процессов с учетом экономических, экологических, социальных и других</p>	<p>ОПК-2.5 Оценка сходимости результатов расчетов, получаемых по различным методикам.</p>	<p>Знать: различные методики для оценки сходимости результатов расчетов (ОПК-2.35)</p> <p>Уметь: применять различные методики для оценки сходимости результатов расчетов (ОПК-2.У5)</p> <p>Владеть: различными методиками для оценки сходимости результатов расчетов (ОПК-2.В5)</p>

ограничений		
-------------	--	--

#### 4. Объем дисциплины

Общий объем дисциплины составляет 9 зачетных единиц, 324 часа.

Таблица 4.1.

Форма обучения	Курс/ семестр	Аудиторные занятия/контактная работа, час.			Самостоятельная работа, час.	Форма промежуточной аттестации
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия		
очная	1/1	17	34	-	57	Экзамен
	1/2	17	34	-	57	Экзамен
	2/3	17	34	-	57	Экзамен
очно-заочная	1/1	12	16	-	80	Экзамен
	1/2	10	16	-	82	Экзамен
	2/3	10	16	-	82	Экзамен

#### 5. Структура и содержание дисциплины

##### 5.1. Структура дисциплины

##### очная форма обучения (ОФО)

Таблица 5.1.1

№ п/п	Структура дисциплины/модуля		Аудиторные занятия, час.			СРС, час.	Всего, час.	Код ИДК	Оценочные средства
	Номер раздела	Наименование раздела	Л.	Пр.	Лаб.				
1	1	Линейная и векторная алгебра	3	4	-	7	14	ОПК-1.6 ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
2	2	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	3	6	-	8	17	ОПК-1.6	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
3	3	Основные понятия математического анализа	6	8	-	8	22	ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
4	4	Дифференциальное исчисление	5	16		7	28	ОПК-1.7 ОПК-2.5	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой

									расчет
	Экзамен					27	27	ОПК-1.4 ОПК-1.6 ОПК-1.7 ОПК-1.8 ОПК-2.5	Экзаменационные вопросы и задания
<b>Итого за 1 семестр:</b>			<b>17</b>	<b>34</b>	<b>-</b>	<b>57</b>	<b>108</b>		
5	5	Интегральное исчисление функции одной переменной	4	10	-	10	24	ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
6	6	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	4	8	-	10	22	ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
7	7	Дифференциальные уравнения	9	16	-	10	35	ОПК-1.4 ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
	Экзамен					27	27	ОПК-1.4 ОПК-1.6 ОПК-1.7 ОПК-1.8 ОПК-2.5	Экзаменационные вопросы и задания
<b>Итого за 2 семестр:</b>			<b>17</b>	<b>34</b>	<b>-</b>	<b>57</b>	<b>108</b>		
8	8	Ряды	6	12	-	10	28	ОПК-1.4 ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
9	9	Теория вероятностей	8	10		10	28	ОПК-1.4 ОПК-1.8	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет
10	10	Математическая статистика	3	12	-	10	25	ОПК-1.8 ОПК-2.5	Аудиторная контрольная работа, коллоквиум типовой расчет, самостоятельная работа
	Экзамен					27	27	ОПК-1.4 ОПК-1.6 ОПК-1.7 ОПК-1.8	Экзаменационные вопросы и задания

								ОПК-2.5	
<b>Итого за 3 семестр:</b>		<b>17</b>	<b>34</b>		<b>57</b>	<b>108</b>			
<b>Итого:</b>		<b>51</b>	<b>102</b>	<b>-</b>	<b>171</b>	<b>324</b>			

**очно-заочная форма обучения (ОЗФО)**

Таблица 5.1.2

№ п/п	Структура дисциплины/модуля		Аудиторные занятия, час.			СРС, час.	Всего, час.	Код ИДК	Оценочные средства
	Номер раздела	Наименование раздела	Л.	Пр.	Лаб.				
1	1	Линейная и векторная алгебра	0,5	0,5	-	11	12	ОПК-1.6 ОПК-1.7	Типовой расчет аудиторная практическая работа, математический диктант «Таблица производных»
2	2	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	0,5	0,5	-	11	12	ОПК-1.6	
3	3	Основные понятия математического анализа	5	5	-	11	21	ОПК-1.7	
4	4	Дифференциальное исчисление	6	10	-	11	27	ОПК-1.7 ОПК-2.5	
	Экзамен					36	36	ОПК-1.4 ОПК-1.6 ОПК-1.7 ОПК-1.8 ОПК-2.5	Экзаменационные вопросы и задания
<b>Итого за 1 семестр:</b>			<b>12</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>80</b>	<b>108</b>		
5	5	Интегральное исчисление функции одной переменной	3	6	-	15	24	ОПК-1.7	Типовой расчет аудиторная практическая работа, математический диктант «Таблица интегралов»
6	6	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	1	2	-	15	18	ОПК-1.7	
7	7	Дифференциальные уравнения	6	8	-	16	30	ОПК-1.4 ОПК-1.7	
	Экзамен					36	36	ОПК-1.4 ОПК-1.6 ОПК-1.7 ОПК-1.8 ОПК-2.5	Экзаменационные вопросы и задания
<b>Итого за 2 семестр:</b>			<b>10</b>	<b>16</b>		<b>82</b>	<b>108</b>		
8	8	Ряды	2	2	-	16	20	ОПК-1.4 ОПК-1.7	Типовой расчет аудиторная практическая работа
9	9	Теория вероятностей	4	6	-	15	25	ОПК-1.4 ОПК-1.8	
10	10	Математическая статистика	4	8	-	15	27	ОПК-1.8 ОПК-2.5	

	Экзамен				36	36	ОПК-1.4 ОПК-1.6 ОПК-1.7 ОПК-1.8 ОПК-2.5	Экзаменационные вопросы и задания
<b>Итого за 3 семестр:</b>		<b>10</b>	<b>16</b>		<b>82</b>	<b>108</b>		
<b>Итого:</b>		<b>32</b>	<b>48</b>		<b>244</b>	<b>324</b>		

## 5.2. Содержание дисциплины/модуля.

### 5.2.1. Содержание разделов дисциплины/модуля (дидактические единицы).

**Раздел 1. Линейная и векторная алгебра.** Матрицы. Действия над матрицами. Определители: определение, свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод. Система координат в пространстве. Векторы: основные понятия. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, координатная форма, приложения. Векторное произведение векторов: определение, свойства, координатная форма, приложения. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, координатная форма, приложения.

**Раздел 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве.** Декартовы и полярные координаты. Различные виды уравнения прямой на плоскости, основные задачи. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Прямая и плоскость в пространстве: основные задачи. Уравнения линии и поверхности в пространстве: основные понятия. Поверхности второго порядка.

**Раздел 3. Основные понятия математического анализа.** Множества: основные понятия. Окрестность точки. Функция: понятие функции, область определения, область значений функции. Числовые функции. График функции. Способы задания функций. Обратная функция. Сложная функция. Основные элементарные функции и их графики. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Предел функции. Односторонние пределы. Теоремы о пределах. Бесконечно малые функции: определение, основные теоремы. Бесконечно большие функции. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функции: применение к вычислению пределов. Непрерывность функций. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции и их классификация. Основные свойства непрерывных функций.

**Раздел 4. Дифференциальное исчисление.** Производная функции: определение, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности. Арифметические свойства производной. Производная сложной и обратной функций. Таблица производных. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференциал функции: определение, геометрический смысл. Основные теоремы о дифференциалах. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Производная и дифференциал высших порядков. Применение производной к исследованию функций. Основные теоремы дифференциального исчисления. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. Монотонность и экстремумы функции: определения, необходимые и достаточные



условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения графика. Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал функции. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производная сложной функции. Полная производная. Дифференцирование неявной функции.

**Раздел 5. Интегральное исчисление функции одной переменной.** Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной). Метод интегрирования по частям. Определение рациональной дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование иррациональных функции: квадратичные иррациональности, дробно-линейная подстановка, тригонометрическая подстановка, интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Приближенное вычисление определенных интегралов: формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона). Несобственные интегралы. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода). Несобственные интегралы от неограниченных функций (2 рода).

**Раздел 6. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.** Двойной интеграл: основные понятия и определения, геометрический и физический смысл, основные свойства. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных и полярных координатах. Приложения двойного интеграла. Тройной интеграл: определение, свойства. Вычисление тройного интеграла в прямоугольных, сферических и цилиндрических координатах, некоторые приложения тройного интеграла. Криволинейный интеграл I рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Криволинейный интеграл II рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Поверхностный интеграл I рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Поверхностный интеграл II рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Дифференциальные операции и интегральные формы теории поля.

**Раздел 7. Дифференциальные уравнения.** Дифференциальные уравнения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка: простейшие; в полных дифференциалах и сводящиеся к ним; с разделяющимися переменными; однородные; линейные первого порядка; уравнение Бернулли. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка: простейшие; уравнения, не содержащие искомую функцию; уравнения, не содержащие независимую переменную. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

**Раздел 8. Ряды.** Последовательности и ряды. Понятие числового ряда. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак. Знакопеременные и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды: основные понятия. Степенной ряд. Сходимость степенных рядов. Область сходимости степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды: ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. Некоторые приложения степенных рядов. Элементы функционального анализа. Тригонометрический ряд и его основные свойства. Сходимость ряда Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

**Раздел 9. Теория вероятностей.** Основные понятия теории вероятностей. Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступлений события. Теорема Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения непрерывной случайной величины.

**Раздел 10. Математическая статистика.** Вариационные ряды и их построение. Проверка статистических гипотез. Корреляционная зависимость величин.

#### 5.2.2. Содержание дисциплины/модуля по видам учебных занятий.

##### Лекционные занятия

Таблица 5.2.1

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Тема лекции (разделы)		
		ОФО	ОЗФО	
1	1	3	0,5	Линейная и векторная алгебра
2	2	3	0,5	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
3	3	6	5	Основные понятия математического анализа
4	4	5	6	Дифференциальное исчисление
5	5	4	3	Интегральное исчисление функции одной переменной
6	6	4	1	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
7	7	9	6	Дифференциальные уравнения
8	8	6	2	Ряды
9	9	8	4	Теория вероятностей
10	10	3	4	Математическая статистика
Итого:		51	32	

##### Практические занятия

Таблица 5.2.2

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Тема практического занятия (разделы)		
		ОФО	ОЗФО	
1	1	4	0,5	Линейная и векторная алгебра
2	2	6	0,5	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

3	3	8	5	Основные понятия математического анализа
4	4	16	10	Дифференциальное исчисление
5	5	10	6	Интегральное исчисление функции одной переменной
6	6	8	2	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
7	7	16	8	Дифференциальные уравнения
8	8	12	2	Ряды
9	9	10	6	Теория вероятностей
10	10	12	8	Математическая статистика
Итого:		102	48	

### Лабораторные работы учебным планом не предусмотрены

### Самостоятельная работа студента

Таблица 5.2.3

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Тема (разделы)			Вид СРС
		ОФО	ОЗФО		
1	1	7	11	Линейная и векторная алгебра	Подготовка к выполнению типового расчета и коллоквиуму, к математическому диктанту
2	2	8	11	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	
3	3	8	11	Основные понятия математического анализа	
4	4	7	11	Дифференциальное исчисление	
5	5	10	15	Интегральное исчисление функции одной переменной	
6	6	10	15	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	
7	7	10	16	Дифференциальные уравнения	
8	8	10	16	Ряды	
9	9	10	15	Теория вероятностей	
10	10	10	15	Математическая статистика	
11	Экзамен	81	108		Экзаменационные вопросы и задания. Выполнение контрольной работы
Итого:		171	244		

5.2.3. Преподавание дисциплины ведется с применением следующих видов образовательных технологий: лекция-диалог (лекционные занятия); лекции-визуализации в PowerPoint в диалоговом режиме (в случае интерактивного метода обучения); работа в малых группах, разбор практических ситуаций (практические занятия), рейтинговая технология контроля учебной деятельности.

### 6. Тематика курсовых работ/проектов

Курсовые работы/проекты учебным планом не предусмотрены

### 7.1. Методические указания для выполнения контрольных работ

(для очной, очно-заочной формы обучения при наличии)

Контрольные работы учебным планом не предусмотрены

### 8. Оценка результатов освоения дисциплины

8.1. Критерии оценивания степени полноты и качества освоения компетенций в соответствии с планируемыми результатами обучения приведены в Приложении 1.

8.2. Рейтинговая система оценивания степени полноты и качества освоения компетенций обучающихся очной формы обучения.

Таблица 8.1

#### 1 семестр

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Выполнение типового расчета	0-6
2	Аудиторная работа «Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ»	0-15
3	Коллоквиум «Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ»	0-9
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
4	Выполнение типового расчета	0-6
5	Аудиторная работа «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»	0-15
6	Коллоквиум «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»	0-9
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
7	Аудиторная работа «Введение в математический анализ: числовые последовательности. Пределы»	0-10
8	Коллоквиум «Первый и второй замечательные пределы»	0-6
9	Выполнение типового расчета	0-3
10	Математический диктант «Таблица производных»	0-2
11	Коллоквиум «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»	0-9
12	Аудиторная работа «Приложения производной функции одной переменной»	0-10
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	<b>ВСЕГО</b>	<b>100</b>

#### 2 семестр

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Коллоквиум «Неопределенный интеграл»	0-9
2	Аудиторная работа «Неопределенный интеграл»	0-15

3	Выполнение типового расчета	0-6
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
4	Коллоквиум «Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл»	0-9
5	Аудиторная работа «Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл»	0-15
6	Выполнение типового расчета «Кратные интегралы. Поверхностные интегралы»	0-6
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
7	Коллоквиум «Дифференциальные уравнения первого и высших порядков»	0-10
8	Аудиторная работа «Вычисление дифференциальных уравнений высших порядков»	0-15
9	Самостоятельная работа «Дифференциальные уравнения первого порядка»	0-5
10	Выполнение типового расчета	0-10
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	<b>ВСЕГО</b>	<b>100</b>

*3 семестр*

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Коллоквиум «Числовые ряды»	0-5
2	Аудиторная работа «Числовые ряды»	0-10
3	Коллоквиум «Функциональные ряды»	0-5
4	Самостоятельная работа «Функциональные ряды»	0-5
5	Выполнение типового расчета	0-5
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
6	Коллоквиум «Основные понятия теории вероятностей. Формула проверки гипотезы»	0-9
7	Аудиторная работа «Основные понятия теории вероятностей. Предельные теоремы»	0-5
8	Коллоквиум «Виды случайных величин. Числовые характеристики СВ»	0-6
9	Аудиторная работа «Виды случайных величин. Числовые характеристики СВ»	0-6
10	Выполнение типового расчета	0-4
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
11	Коллоквиум «Элементы математической статистики»	0-10
12	Самостоятельная работа «Уравнение прямой линии регрессии»	0-10
13	Выполнение типового расчета	0-20
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40

	<b>ВСЕГО</b>	<b>100</b>
--	--------------	------------

8.2. Рейтинговая система оценивания степени полноты и качества освоения компетенций обучающихся очно-заочной формы обучения.

Таблица 8.2

*1 семестр*

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Выполнение типового расчета	0-20
2	Коллоквиум	0-10
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
3	Выполнение типового расчета	0-15
4	Математический диктант «Таблица производных и правила ее нахождения»	0-10
5	Коллоквиум	0-5
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
6	Выполнение типового расчета	0-5
7	Экзамен	0-35
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	<b>ВСЕГО</b>	<b>100</b>

*2 семестр*

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Выполнение типового расчета	0-20
2	Коллоквиум	0-10
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
3	Выполнение типового расчета	0-15
4	Математический диктант «Таблица неопределенных интегралов»	0-10
5	Коллоквиум	0-5
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
6	Выполнение типового расчета	0-5
7	Экзамен	0-35
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	<b>ВСЕГО</b>	<b>100</b>

*3 семестр*

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
-------	---	-------------------

1 текущая аттестация		
1	Выполнение типового расчета	0-20
2	Коллоквиум	0-10
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
3	Выполнение типового расчета	0-15
4	Математический диктант «Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций»	0-10
5	Коллоквиум	0-5
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
6	Выполнение типового расчета	0-5
7	Экзамен	0-35
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	<b>ВСЕГО</b>	<b>0-100</b>

## 9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины/модуля

9.1. Перечень рекомендуемой литературы представлен в Приложении 2.

9.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Собственная полнотекстовая база (ПБД) БИК ТИУ <a href="http://elib.tyuiu.ru/">http://elib.tyuiu.ru/</a>	
Гражданско-правовой договор № 883-18 от 08.08.2018 на электронно-библиотечную систему IPRbooks с ООО «Ай Пи Эр Медиа» <a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>	С 01.09.2018 по 31.08.2019
Гражданско-правовой договор № 884-18 от 08.08.2018 с ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» на оказание услуг по предоставлению доступа к ЭБС <a href="http://www.biblio-online.ru">www.biblio-online.ru</a>	С 01.09.2018 по 31.08.2019
Гражданско-правовой договор № 885-18 от 07.08.2018 с ООО «ЭБС ЛАНЬ» <a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>	С 01.09.2018 по 31.08.2019
Договор № 03-189/2017 от 20.10.2017 об оказании услуг двухстороннего доступа к ресурсам научно-технической библиотеки ФГБОУ ВО РГУ Нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина <a href="http://elib.gubkin.ru/">http://elib.gubkin.ru/</a>	С 20.10.2017 по 19.10.2019
Договор № Б173/2017 04-6/2018 от 09.01.2018 на оказание услуг двухстороннего доступа к ресурсам научно-технической библиотеки ФГБОУ ВПО УГНТУ <a href="http://bibl.rusoil.net">http://bibl.rusoil.net</a>	с 25.12.2017 по 24.12.2019
Договор № 04-7/2018 от 15.02.2018 об оказании услуг двухстороннего доступа к ресурсам научно-технической библиотеки ФГБОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет» <a href="http://lib.ugtu.net/books">http://lib.ugtu.net/books</a>	С 15.02.2018 по 14.02.2020
Гражданско-правовой договор № 5064-19 от 31.07.2019 с ООО «Политехресурс» <a href="http://www.studentlibrary.ru">http://www.studentlibrary.ru</a> по предоставлению доступа к базе данных Консультант студента «Электронная библиотека технического ВУЗа»	С 01.09.2019 по 31.08.2020
Договор № 5065-19 от 31.07.2019 на предоставление доступа к электронно-библиотечной системе IPRbooks с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа» <a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>	С 01.09.2019 по 31.08.2020
Гражданско-правовой договор № 5066-19 от 31.07.2019 с ООО	С 01.09.2019 по

«Издательство ЛАНЬ» <a href="http://e.lanbook.com">http://e.lanbook.com</a>	31.08. 2020
Гражданско-правовой договор № 5068-19 от 09.07.2019 с ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» на оказание услуг по предоставлению доступа к ЭБС <a href="http://www.biblio-online.ru">www.biblio-online.ru</a>	С 01.09.2019 по 31.08. 2020
Договор №886-18 от 03.12.2018г. на оказание услуг по предоставлению доступа к изданиям электронно-библиотечной системы eLibrary с ООО «РУНЭБ» <a href="http://elibrary.ru/">http://elibrary.ru/</a> Количество пользователей неограниченно, онлайн-доступ с любой точки, где есть Интернет	С 01.01.2019 по 31.12.2019
Гражданско-правовой договор №5931-19 от 29.08.2019 с ООО «КноРус медиа» на оказание услуг по предоставлению доступа к электронно-библиотечной системе ВООК.ru <a href="https://www.book.ru">https://www.book.ru</a>	С 01.09.2019 по 31.08.2020

9.3. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение (Adobe Acrobat Reader), в т.ч. Microsoft Windows (Договор №5378-19 от 02.09.2019 до 01.09.2020).

## 10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения для проведения всех видов работы, предусмотренных учебным планом, укомплектованы необходимым оборудованием и техническими средствами обучения.

Таблица 10.1

Перечень оборудования, необходимого для освоения дисциплины	Перечень технических средств обучения, необходимых для освоения дисциплины (демонстрационное оборудование)
Доска, таблицы производных и интегралов	Комплект мультимедийного оборудования: проектор, экран, компьютер, акустическая система, локальная и корпоративная сеть.

## 11. Методические указания по организации СРС

### 11.1. Методические указания по подготовке к практическим занятиям.

Важной формой работы студента является систематическая и планомерная подготовка к практическому занятию. После лекции студент должен познакомиться с планом практических занятий и списком обязательной и дополнительной литературы, которую необходимо прочитать, изучить и законспектировать. Разъяснение по вопросам новой темы студенты получают у преподавателя в конце предыдущего практического занятия.

Подготовка к практическому занятию требует, прежде всего, чтения рекомендуемых источников и монографических работ. Важным этапом в самостоятельной работе студента является повторение материала по конспекту лекции. Одна из главных составляющих внеаудиторной подготовки – работа с книгой. Она предполагает: внимательное прочтение, критическое осмысление содержания, обоснование собственной позиции по дискуссионным моментам, постановки интересующих вопросов, которые могут стать предметом обсуждения на практическом занятии.

В начале практического занятия должен присутствовать организационный момент и вступительная часть. Преподаватель произносит краткую вступительную речь, где формулируются основные вопросы и проблемы, способы их решения в процессе работы.

В конце каждой темы подводятся итоги, предлагаются темы докладов, выносятся вопросы для самоподготовки. Как средство контроля и учета знаний студентов в течение семестра проводятся контрольные работы.



Практические занятия являются одной из важнейших форм обучения студентов: они позволяют студентам закрепить, углубить и конкретизировать знания по курсу алгебры и теории чисел, подготовиться к научно-исследовательской деятельности. В процессе работы на практических занятиях обучающийся должен совершенствовать умения и навыки самостоятельного анализа источников и научной литературы, что необходимо для научно-исследовательской работы. Усвоенный материал необходимо научиться применять при решении практических задач.

#### 11.2. Методические указания по организации самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по математике – это педагогически управляемый процесс самостоятельной деятельности студентов, обеспечивающий реализацию целей и задач по овладению необходимым объемом знаний, умений и навыков, опыта творческой работы и развитию профессиональных интеллектуально-волевых, нравственных качеств будущего специалиста.

Выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная, выполняется на занятиях под руководством преподавателя и по его заданию; внеаудиторная, выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основные виды аудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика»: ответы на проблемные вопросы преподавателя; формулировка вопросов студентам, преподавателю; выполнение письменных заданий, тестирование; выполнение творческих работ; выступление с сообщением по новому материалу; конспектирование, работа с книгой.

Основные виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика» - работа с учебником; конспектирование отдельного вопроса пройденной темы; работа со справочной литературой; решение задач; использование поисковых систем в среде Интернет.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских знаний.

Лимит времени для проведения самостоятельной работы студентов аудиторно отводится преподавателем непосредственно на занятии, для каждого вида работы определенный.

#### *Самостоятельная работа студентов при изучении нового материала*

Работу по формированию умений, обеспечивающих самостоятельное изучение студентом нового материала, нужно начинать на занятии. Можно предложить группе самостоятельно изучить тот или иной материал учебника. Для проведения такой работы, во-первых, преподаватель должен быть убежден, что каждый студент готов к ней, во-вторых, студент должен знать, что конкретно он должен знать и уметь после проведения этой работы. Системой предварительных заданий, устных и письменных упражнений преподавателю следует подготовить необходимую базу, обеспечивающую самостоятельность в этой работе.

Специальные вопросы и задания, ориентирующие студентов и ведущие к конечной цели данной работы, заранее можно написать на доске (или проецировать на экран). При наличии вопросов в учебнике можно просто указать, на какие вопросы студент должен уметь ответить, изучив данный материал. Среди вопросов к работе можно предлагать и такие, ответа на которые непосредственно нет в учебнике, и поэтому требуются некоторые размышления студента. Возможно, не все студенты сумеют ответить на них. Однако, каждая самостоятельная работа по изучению нового материала должна обязательно завершаться проверкой понимания изученного. Желательно, чтобы самостоятельно изученный на уроке материал был и закреплен здесь же. В этом случае дома его придется повторять лишь отдельным студентам, и перегрузки домашними заданиями не будет. Вопрос о том, сколько времени придется тратить на выполнение домашнего задания, во многом зависит от того, как понят студентом материал на занятии и как он закреплен. А это, в свою очередь, обеспечивается наличием у студентов умений и навыков самостоятельной работы и навыков учебного труда.

Необходимо рационально выделить материал для самостоятельного изучения в сочетании с другими формами работы.

#### *Самостоятельная работа студентов при решении задач*

В процессе изучения математики наряду с некоторыми теоретическими сведениями студенты овладевают определенными приемами решения задач. Обычно с такими приемами знакомит сам преподаватель, показывая решение задач нового образца. Наиболее эффективным при этом является такой подход, при котором преподаватель раскрывает перед студентами технологию решения задачи, показывает, чем мотивировано применение некоторого метода решения, чем обусловлен выбор того или иного пути.

Работа над задачей тоже может быть полностью самостоятельной работой студентов.

Она преследует несколько целей:

- продолжить формирование умений самостоятельно изучать текст, который в данном случае представляет собой задачу;
- обучить рассуждениям;
- обучить оформлению решения задач.

К тому же студенты будут знать, что у них имеется образец рассуждений и оформления задачи, к которому они могут обратиться при решении другой задачи или при проверке правильности своего решения.

Непременным условием усвоения новых теоретических сведений и овладения новыми приемами решения задач является выполнение студентами тренировочных упражнений, в ходе которого приобретенные знания становятся полным достоянием студентов. Как известно, существуют две формы организации такой тренировочной работы - фронтальная работа и самостоятельная работа. Фронтальная работа на занятиях математики - это традиционная, давно сложившаяся форма. Схематически ее можно описать так: один из студентов выполняет задание на доске, остальные выполняют это же задание в тетрадях. Самостоятельная работа студентов на уроке состоит в выполнении без помощи преподавателя и товарищей некоторого задания.

Большие возможности для подготовки студентов к творческому труду и самостоятельному пополнению знаний имеет самостоятельное выполнение заданий. В этом случае студент без какой-либо помощи должен наметить пути решения, правильно выполнить все построения, преобразования, вычисления и т. п. В таком случае мысль студента работает наиболее интенсивно. Он приобретает практический навык работы в ситуации, с которой ему неоднократно придется сталкиваться в последующей трудовой деятельности. Вместе с тем самостоятельная работа студентов на занятиях математики имеет и свои недостатки. Усилия студента могут оказаться напрасными и не привести к результату, если он недостаточно подготовлен к решению поставленной задачи. Студент не слышит комментариев к решению, а рассуждения, которые он проводит мысленно, могут быть не всегда правильными и достаточно полными, причем возможности обнаружить это студент не имеет. Вообще при самостоятельном

выполнении заданий мыслительные процессы не могут быть проконтролированы преподавателем. Поэтому даже верный ответ может оказаться случайным. Исправление ошибок, допущенных при самостоятельной работе, происходит в ходе ее проверки по окончании всей работы. Поэтому, выполняя упражнение самостоятельно, студент, не усвоивший материал, может повторять одну и ту же ошибку от примера к примеру, и невольно закрепить неправильный алгоритм.

*Самостоятельные работы и индивидуальные задания, тесты – виды работы, обеспечивающие повышение уровня самостоятельной деятельности студентов*

Наиболее распространенной формой работы, обеспечивающей повышение самостоятельной деятельности студентов, являются самостоятельные работы и индивидуальные задания.

По своему дидактическому назначению самостоятельные работы и индивидуальные задания можно разбить на два основных вида: обучающие и контролирующие.

В филиале ТИУ г. Сургута по математике разработан ряд самостоятельных работ и индивидуальных заданий разных видов. Они составляют дидактические материалы, которые являются составной частью комплексного методического обеспечения дисциплины.

Тесты обеспечивают информацию по ряду качественных характеристик знаний и умений студентов. Тестовые задания удобно использовать при организации самостоятельной работы в режиме самоконтроля, при повторении учебного материала. Тестовые задания с выбором ответов особенно ценны тем, что каждому студенту дается возможность четко представить себе объем обязательных требований к овладению знаниями по теме (нескольким темам, всей дисциплине), объективно оценить свои успехи, получить конкретные указания для дополнительной и индивидуальной работы.

При работе самостоятельно студент должен уметь правильно конспектировать текст. Для этого необходимо соблюдать некоторые рекомендации, а именно:

- конспект должен быть легко обзримым и легко читаемым;
- заголовок пишется цветной пастой;
- левая треть листа отводится под поле для отметок студента, 2/3 справа предназначены для конспектирования;
- подзаголовки пишутся темной пастой и подчеркиваются цветной;
- в тексте конспекта высота строчных букв 2 мм (бумага в клетку, записи в каждой строке);
- абзацы текста отделяются друг от друга пробельной строкой, чтобы облегчить чтение записей;
- в каждом абзаце ключевое слово подчеркивается цветной пастой;
- в конце изучаемой темы оставляется чистая страница для построения структурно - логической схемы или сжатой информации иного типа.

Студенту необходимо уметь работать с книгой (источником), выделять главное из текста. Для этого необходимо:

- познакомиться с титульным листом;
- проанализировать заглавие;
- обратить внимание на классификационную характеристику книги в подзаголовке;
- обратить внимание на год издания книги;
- прочитать оглавление книги, если есть - аннотацию, предисловие и послесловие к ней;
- обратить внимание на все непонятные слова и выражения;
- подумать, что непонятно в самом содержании текста;
- по ходу чтения составить вопросы к тексту и выдвинуть свои предложения о дальнейшем его содержании;
- проверить верность выдвинутых предложений при чтении последующих частей текста;
- выделить в тексте главное, существенное;

- особое внимание уделить первым фразам каждого абзаца, к которым потом «привязываются» все другие мысли, входящие в этот абзац;
- сформулировать главную мысль текста, его основные положения (тезисы);
- прочитать повторно трудные части текста, проверить правильность их понимания;
- выработать собственное отношение к предмету речи, придумать аргументы в обоснование своей точки зрения;
- соотнести прочитанное с другой известной информацией по той же теме, определить сходства и расхождения;
- обобщая полученные сведения, сформулировать собственные выводы на основе прочитанного.

При самостоятельной работе над конспектом, студенту необходимо научиться отделять главное от второстепенного, наиболее существенную информацию. Главной является информация, имеющая наиболее существенное значение для понимания данной темы, вопроса. К ней относятся определения научных понятий, формулировки законов, правил, перечисление принципов, основные мысли (положения, утверждения) автора, его выводы, классификация явлений, фактов.

Второстепенная информация либо детализирует, разъясняет главную информацию, либо отражает вытекающие из этой информации конкретные следствия и практические рекомендации. К этому типу информации относятся аргументы, обоснования, примеры, подробные характеристики отдельных явления, второстепенные факты (из биографии писателя, из истории создания произведения), а также разного рода комментарии (объяснительные замечания, толкования) тех или иных отрывков из произведений художественной литературы. После этого необходимо ознакомиться с сильными позициями в учебном и научном тексте это: 1) заглавие, 2) зачин (введение), 3) концовка (заключение).

Сильные позиции есть не только во всем тексте, но и в его частях. В абзаце наиболее информативным является первое (начальное) предложение, содержащее тезис, то есть основное положение автора, которое затем конкретизируется в основной части абзаца. В отдельном предложении более информативной является, как правило, вторая его часть, то есть предикат, который отражает новое.

Главная информация в тексте отражается не только позиционно, но и графически (курсивом, жирным шрифтом, подчеркиванием и другими способами).

Главную информацию нужно воспроизвести в реферате полностью, без каких-либо существенных сокращений, порой в буквальном смысле - дословно. Второстепенная же информация же должна быть подвергнута смысловой переработке и сжатию.

#### **Задачи для самостоятельного решения**

##### **Задание 1**

Составить матрицы А и В такой размерности, чтобы можно было найти:

- 1)  $2A+4B$ ;
- 2) матрицу С, если  $2C-4B=2A$ ;
- 3)  $A-2B$ .

##### **Задание 2**

Найти произведение матрицы А на В и В на А, если возможно

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad B = (2 \ 3 \ 2 \ 4);$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix};$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$9) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & -1 \end{pmatrix};$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

### Задание 3

Вычислить определители третьего порядка

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}; \quad 3. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 4. \begin{vmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 5 & 16 & 2 \\ 0 & -5 & 17 \end{vmatrix};$$

$$5. \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}; \quad 6. \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 9 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 7. \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 8 & 6 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 8. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 10 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix};$$

$$9. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 10 & -5 & 7 \end{vmatrix}; \quad 10. \begin{vmatrix} 7 & 3 & 11 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

### Задание 4

Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{array}{l}
1. \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 0 \\ 8 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 7 & 6 & -7 & 0 \end{vmatrix}, 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}, 3. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 7 \\ -8 & 0 & 8 & 3 \\ -5 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}, 4. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}, \\
5. \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -7 & 8 \end{vmatrix}, 6. \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}, 7. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}, 8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \\
9. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ -7 & 6 & -6 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}, 10. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & -8 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.
\end{array}$$

### Задание 5

Найти обратную матрицу для данной

$$\begin{array}{l}
1. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 2. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}; 3. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 4. \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \\
5. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 7. \begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 8. \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}; \\
9. \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 10. \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

### Задание 6

Найти ранг матрицы

$$\begin{array}{l}
1. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 2. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}; 3. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 4. \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \\
5. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 7. \begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 8. \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}; \\
9. \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 10. \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

### Задание 7

Исследовать систему уравнений на совместность

$$\begin{array}{l}
1. \begin{cases} x+3y+3z=14, \\ 3x+2y+z=10, \\ x+y+z=6, \\ 2x+3y-z=5, \\ x+y=3. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+5y+4z+3t=1, \\ 2x-y+2z-t=0, \\ 5x+3y+8z+t=1. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x+2y=4, \\ x-4y=-1, \\ 7x+10y=12, \\ 5x+6y=8, \\ 3x-16y=-5. \end{cases} \\
4. \begin{cases} x+5y+4z=1, \\ 2x+10y+8z=3, \\ 3x+15y+12z=5. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x-3y+2z=-1, \\ x+9y+6z=3, \\ x+3y+4z=1. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x+2y+z+3t=-1, \\ -y+2z-4t=4, \\ 3x+6y+3z+9t=-3, \\ 2x+4y+2z+6t=-2. \end{cases} \\
7. \begin{cases} 2x+7y+3z+t=5, \\ x+3y+5z-2t=3, \\ x+5y-3z+8t=1, \\ 5x+18y+4z+5t=12. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-4, \\ 4x-7y+z=5. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 3x-2y+3z=1, \\ 6x-4y-z=2, \\ -3x+2y+11z=3. \end{cases} \\
10. \begin{cases} 2x-y+3z-2t+4u=1, \\ 4x-2y+5z+t+7u=1, \\ 2x-y+z+8t+2u=-1. \end{cases}
\end{array}$$

### Задание 8

Решить систему уравнений матричным методом, по правилу Крамера и методом Гаусса

$$\begin{array}{l}
1. \begin{cases} 5x+y-z=0, \\ x+2y+3z=14, \\ 4x+3y+2z=16. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x+4y=11, \\ 5x+6z=28, \\ x+2z=7. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x+y-2z=6, \\ 2x+3y-7z=16, \\ 5x+2y+z=16. \end{cases} \\
4. \begin{cases} 2x+4y+z=4, \\ 3x+6y+2z=4, \\ 4x-y-3z=1. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 2x-3y-6z=1, \\ 3x+y-2z=-1, \\ x-2y+z=5. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x+2y+3z=7, \\ x-3y+2z=5, \\ x+y+z=3. \end{cases} \\
7. \begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-y-3z=13, \\ 3x-2y+4z=-16. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x+3y-6z=12, \\ 3x+2y+5z=-10, \\ 2x+5y-3z=6. \end{cases} \\
10. \begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y+3z=3, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}
\end{array}$$

### Задание 9

Найти собственное значение и собственный вектор матрицы

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad 3. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad 4. \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix};$$

$$5. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 7. \begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 8. \begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix};$$

$$9. \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}; 10. \begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

### Задание 10

Найти ранг системы линейных однородных уравнений, общее решение, фундаментальную систему решений. Выразить общее решение через фундаментальную систему, если:

$$1. \begin{cases} x+2y+3z=0, \\ x-y+z=0, \\ x+3y-z=0, \\ 3x+4y+3z=0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x+2y+3z-t=0, \\ x-y+z+2t=0, \\ x+5y+5z-4t=0, \\ x+8y+7z-7t=0. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+2y+z=0, \\ 2x+y+3z=0, \\ 5x+2y+3z=0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x-y-z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+3z=0, \\ 6x-y+8z=0. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 3x-y+2z+5t=0, \\ 3x-3y+6z+15t=0, \\ x+3y-z=0, \\ 3x-y+3z+14t=0. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 5x+5y+4z+4t=0, \\ 2x+3y+2z+5t=0, \\ 7x-y+z-9t=0, \\ 2x+2y+3z+4t=0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x+3y+5z+t=0, \\ 3x+5y+3z+t=0, \\ 3x+5y+z+3t=0, \\ 2y-2z=0. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x+3y+5z+t=0, \\ 3x+2y+5z+t=0, \\ 3x+5y+2z+t=0, \\ 3x+5y+z+2t=0. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x-2y+z+3t-u=0, \\ 2x+y+3z-t+2u=0, \\ 3x+4y+5z-5t+3u=0, \\ x+3y+2z-t+2u=0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x+3y+3z+2t+4u=0, \\ x+4y+5z+3t+7u=0, \\ 2x+5y+4z+t+5u=0. \end{cases}$$

### Задачи для самостоятельного решения

- Единичные векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  удовлетворяют условию  $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$ . Найти  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1$ .
- Дано:  $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=5$ , угол между векторами  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{b}, \vec{c}$  равен  $60^\circ$ , векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  - компланарны. Найти модуль вектора  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .
- Найти вектор  $\vec{x}$ , зная, что он перпендикулярен к оси  $Oz$  и удовлетворяет условиям  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9, \vec{x} \cdot \vec{b} = -4$ , где  $\vec{a} = (3; -1; 5), \vec{b} = (1; 2; -3)$ .
- Показать, что четырехугольник с вершинами  $A(-5; 3; 4), B(-1; -7; 5), C(6; -5; -3)$  и  $D(2; 5; -4)$  есть квадрат.
- Доказать, что вектор  $\vec{d} = \vec{c} \cdot \left( \vec{b} \cdot \vec{a} \right) - \vec{a} \cdot \left( \vec{b} \cdot \vec{c} \right)$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}$ .



6. Найти вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  и удовлетворяющий условию  $\vec{b} \cdot \vec{a} = 28$ .

7. Дано:  $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = (2; 1; 2)$ . Найти:

а)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;

б) угол между векторами  $\vec{a}, \vec{b}$ ;

в)  $np_{\vec{a}} \vec{b}$ ;

г)  $np_{\vec{b}} \vec{a}$

8. При каком значении  $\lambda$  векторы  $\vec{b} = \lambda\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$  и  $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \lambda\vec{k}$  взаимно перпендикулярны?

9. В треугольнике  $ABC$  вершины имеют координаты  $A(1; 1; -1)$ ,  $B(2; 3; 1)$ ,  $C(3; 2; 1)$ .

Найти:

а) длины сторон;

б) внутренние углы;

в) острый угол между медианой  $BD$  и стороной  $AC$ .

10. Доказать, что длины векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равны, если векторы  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{a} - \vec{b}$  перпендикулярны.

11. Векторы  $\vec{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$ ,  $\vec{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$ ,  $\vec{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$  образуют треугольник  $ABC$ ; векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - взаимно перпендикулярные орты. Найти углы треугольника  $ABC$ .

12. Зная, что  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ ,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = 4$ , вычислить  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

13. Найти угол между биссектрисами углов  $O_x y$  и  $O_y z$ .

14. Какой угол образуют единичные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если известно, что векторы  $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$  и  $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$  взаимно перпендикулярны.

15. Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  имеют равные длины и попарно образуют равные углы. Найти координаты вектора  $\vec{c}$ , если  $\vec{a} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (0; 1; -1)$ .

16. Доказать, что точки  $A(-3; -7; -5)$ ,  $B(0; -1; -2)$  и  $C(2; 3; 0)$  лежат на одной прямой, причем точка  $B$  расположена между точками  $A$  и  $C$ .

### 3.4.2. Векторное произведение векторов

Тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  называется **упорядоченной**, если известно какой из них является первым, вторым и третьим.

Упорядоченная тройка векторов является **правой** (рис. 5), если после приведения их к общему началу кратчайший поворот от первого ко второму вектору из конца третьего вектора виден против часовой стрелки. Иначе, тройка векторов – **левая** (рис. 6).

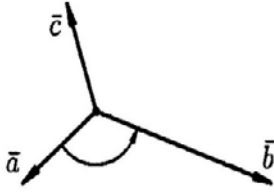


Рис.5

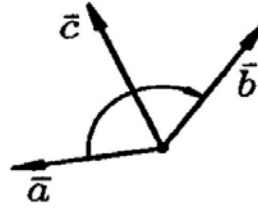


Рис. 6

**Векторным произведением** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют **вектор**  $\vec{c} = \left[ \vec{a}, \vec{b} \right]$ , для которого

выполнено:

1.  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
2.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
3.  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  - правая тройка векторов.

*Свойства векторного произведения*

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е.  $\left[ \vec{a}, \vec{b} \right] = -\left[ \vec{b}, \vec{a} \right]$
2. Сочетательное свойство  $k \left[ \vec{a}, \vec{b} \right] = \left[ (k \cdot \vec{a}), \vec{b} \right] = \left[ \vec{a}, (\lambda \cdot \vec{b}) \right]$
3. Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда  $\left[ \vec{a}, \vec{b} \right] = \vec{0}$
4. Распределительное свойство  $\left[ (\vec{a} + \vec{b}), \vec{c} \right] = \left[ \vec{a}, \vec{c} \right] + \left[ \vec{b}, \vec{c} \right]$

### Теорема

Пусть в ортонормированном базисе  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  даны векторы  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ .

Тогда их векторное произведение найдем по формуле:

$$\left[ \vec{a}, \vec{b} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Или получим вектор с координатами

$$\{a_2b_3 - a_3b_2; -(a_1b_3 - a_3b_1); a_1b_2 - a_2b_1\}$$

### Доказательство:

Разложим данные векторы по базисным векторам, тогда получим:

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}$$

Найдем векторное произведение данных векторов, получим:

$$\left[ \vec{a}, \vec{b} \right] = \left[ (a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}), (b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + b_3 \cdot \vec{k}) \right] =$$

$$= a_1 b_1 \left[ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{i} \end{matrix} \right] + a_1 b_2 \left[ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{matrix} \right] + a_1 b_3 \left[ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{k} \end{matrix} \right] + a_2 b_1 \left[ \begin{matrix} \vec{j} \\ \vec{i} \end{matrix} \right] + a_2 b_2 \left[ \begin{matrix} \vec{j} \\ \vec{j} \end{matrix} \right] + a_2 b_3 \left[ \begin{matrix} \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} \right] + \\ + a_3 b_1 \left[ \begin{matrix} \vec{k} \\ \vec{i} \end{matrix} \right] + a_3 b_2 \left[ \begin{matrix} \vec{k} \\ \vec{j} \end{matrix} \right] + a_3 b_3 \left[ \begin{matrix} \vec{k} \\ \vec{k} \end{matrix} \right]$$

Так как

$$\left[ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{matrix} \right] = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1 = |\vec{k}|$$

$$\left[ \begin{matrix} \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} \right] = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \sin 90^\circ = 1 = |\vec{i}|$$

$$\left[ \begin{matrix} \vec{k} \\ \vec{i} \end{matrix} \right] = |\vec{k}| \cdot |\vec{i}| \cdot \sin 90^\circ = 1 = |\vec{j}|$$

Аналогично по свойствам имеем:

$$\left[ \begin{matrix} \vec{j} \\ \vec{i} \end{matrix} \right] = -1 = -|\vec{k}|$$

$$\left[ \begin{matrix} \vec{k} \\ \vec{j} \end{matrix} \right] = -1 = -|\vec{i}|$$

$$\left[ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{k} \end{matrix} \right] = -1 = -|\vec{j}|$$

Тогда с учетом данных равенств имеем:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] &= a_1 b_2 |\vec{k}| - a_1 b_3 |\vec{j}| - a_2 b_1 |\vec{k}| + a_2 b_3 |\vec{i}| + a_3 b_1 |\vec{j}| - a_3 b_2 |\vec{i}| = \\ &= \vec{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

### Следствие 1

Площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$ ;  $\vec{b}$ , как на сторонах равна

$$\left\| \left[ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] \right\| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi. \text{ (рис. 7) И, значит } S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left\| \left[ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] \right\|$$

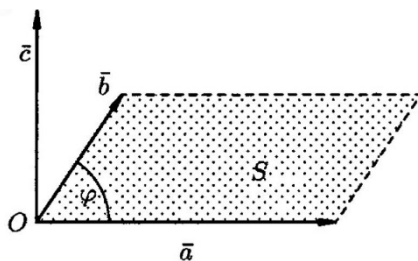


Рис. 7

### Следствие 2

Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\left[ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] = 0$  (и наоборот), т.е.

$$\left[ \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

У коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти координаты вектора  $\vec{a} \times (2\vec{a} + \vec{b})$ , если  $\vec{a} = (3; -1; -2)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; -1)$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Найти:  $\vec{c} = (\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b})$ ;  $|\vec{c}|$ .

3. Дано:  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2\vec{k}$ , угол между векторами  $\vec{a}, \vec{b}$  равен  $120^\circ$ . Найти:  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ;  $\left| \begin{pmatrix} \vec{a} + 2\vec{b} \\ -\vec{a} + 3\vec{b} \end{pmatrix} \right|$ .

4. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(-2; 1; 2)$ .

5. Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$  и  $\vec{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k}$

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = (8; 4; 1)$  и  $\vec{b} = (2; -2; 1)$

7. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $45^\circ$ . Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ .

8. Дано:  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 20$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ . Найти  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .

9. Дано:  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 26$ ,  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . Найти  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

10. Найти единичный вектор  $\vec{c}$ , перпендикулярный каждому из векторов  $\vec{a} = (3; -1; 2)$  и  $\vec{b} = (-1; 3; -1)$ .

11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$  и  $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$ , где  $|\vec{p}| = 4$ ,  $|\vec{q}| = 3$ , угол между векторами  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  равен  $135^\circ$ .

12. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(0; -1; 2)$ ,  $C(3; 4; 5)$ .

13. Даны векторы  $\vec{a} = (-4; -8; 8)$ ,  $\vec{b} = (4; 3; 2)$ . Найти векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

14. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$  и  $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ . Найти произведения  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  и  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ .

15. Найти координаты вектора  $\vec{x}$ , перпендикулярного оси аппликат и вектору  $\vec{a} = (8; -15; 3)$ . Вектор  $\vec{x}$  образует острый угол с осью абсцисс; причем  $|\vec{x}| = 51$ .

16. Найти длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

17. Вычислить синус угла, образованного векторами  $\vec{a} = (2; -2; 1)$  и  $\vec{b} = (2; 3; 6)$ .

18. Даны вершины треугольника  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(5; -6; 2)$ ,  $C(1; 3; -1)$ . Найти длину его высоты, опущенной из вершины  $B$  на сторону  $AC$ .

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить произведение  $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} - \vec{c})(\vec{c} - \vec{a})$ .

2. Вычислить произведение  $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$ .

3. Какую тройку образуют векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :

а)  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{c} = \vec{k}$ ;

б)  $\vec{a} = (1; -4; 0)$ ,  $\vec{b} = (6; 3; -2)$ ,  $\vec{c} = (1; -2; 2)$ .

4. Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку. Найти  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ , зная что  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 3$ .

5. Даны векторы  $\vec{a} = (3; 5; -1)$ ,  $\vec{b} = (0; -2; 1)$  и  $\vec{c} = (-2; 2; 3)$ . Найти  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ .

6. Вычислить произведение  $\vec{b}(\vec{c} + \vec{a})(\vec{b} + 2\vec{c})$ , если  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 5$ .

7. Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; угол между векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  равен  $30^\circ$ ,  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 3$ . Найти  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ .

8. Найти объем пирамиды с вершинами  $A_1(0; 0; 1)$ ,  $A_2(2; 3; 5)$ ,  $A_3(6; 2; 3)$ ,  $A_4(3; 7; 2)$ .

9. Показать, что точки  $A(5; 7; 2)$ ,  $B(3; 1; -1)$ ,  $C(9; 4; -4)$  и  $D(1; 5; 0)$  лежат в одной плоскости.

10. Даны вершины пирамиды  $A(-5; -4; 8)$ ,  $B(2; 3; 1)$ ,  $C(4; 1; -2)$ ,  $D(6; 3; 7)$ . Найти длину высоты, опущенной на грань  $BCD$ .

11. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(3; 0; 1)$ ,  $C(2; -1; 3)$ . Найти координаты четвертой вершины  $D$ , если известно, что она лежит на оси ординат.

12. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , построенный на векторах  $\vec{AB} = (4; 3; 0)$ ,  $\vec{AD} = (2; 1; 2)$  и  $\vec{AA_1} = (-3; -2; 5)$ . Найти:

- а) объем параллелепипеда;
- б) площадь грани  $ABCD$ ;
- в) длину высоты, проведенной из вершины  $A_1$ ;
- г) угол между ребром  $AB$  и диагональю  $BD_1$ .

13. Дана пирамида с вершинами в точках  $A_1(1; 2; 3)$ ,  $A_2(-2; 4; 1)$ ,  $A_3(7; 6; 3)$ ,  $A_4(4; -3; -1)$ . Найти:

- а) длину ребер  $A_1 A_2$ ,  $A_1 A_3$ ,  $A_1 A_4$ ;
- б) площадь грани  $A_1 A_2 A_3$ ;
- в) угол между ребрами  $A_1 A_4$  и  $A_1 A_3$ ;
- г) объем пирамиды;
- д) длину высоты, опущенной на грань  $A_1 A_2 A_3$ .

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Даны точки  $A_1(3; -4; 1)$  и  $A_2(4; 6; -3)$ . Найти координаты вектора  $\vec{a} = \vec{A_1 A_2}$ .

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма:  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(6; 4; 4)$ . Найти его четвертую вершину  $D$ .

3. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$  и  $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$  коллинеарны?

4. Разложить вектор  $\vec{c} = (9; 4)$  по векторам  $\vec{a} = (1; 2)$  и  $\vec{b} = (2; -3)$ .

5. Найти координаты вектора  $\vec{a}$ , если  $|\vec{a}| = 3$  и углы между вектором и координатными осями равны:  $\alpha = \beta = \gamma$ .

6. Луч образует с двумя осями координат углы в  $60^\circ$ . Под каким углом наклонен он к третьей оси?

7. Даны векторы  $\vec{a} = (2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-1; 3)$ ,  $\vec{c} = (-1; 3)$ . При каком значении коэффициента  $\alpha$  векторы  $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$  и  $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$  коллинеарны?

8. Даны точки  $A(-1;5;-10)$ ,  $B(5;-7;8)$ ,  $C(2;2;-7)$ ,  $D(5;-4;2)$ . Проверить, что векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  коллинеарны; установить, какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или в разные?

9. Представить вектор  $\vec{d} = (4;12;-3)$  как линейную комбинацию векторов  $\vec{a} = (2;3;1)$ ,  $\vec{b} = (5;7;0)$  и  $\vec{c} = (3;-2;4)$ .

10. На оси  $Oy$  найти точку  $M$ , равноудаленную от точек  $A(1;-4;7)$  и  $B(5;6;-5)$ .

11. На оси  $Ox$  найти точку  $M$ , расстояние которой от точки  $A(3;-3)$  равно 5.

12. Даны вершины треугольника  $A(3;-1;5)$ ,  $B(4;2;-5)$ ,  $C(-4;0;3)$ . Найти длину медианы, проведенной из вершины  $A$ .

13. Найти сумму координат точки, лежащей на оси  $Ox$ , равноудаленной от точек  $A(2;-4;5)$  и  $B(-3;2;7)$ .

## Элементы аналитической геометрии в пространстве

### 1. Методические указания к решению

**Задание 1.** Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки  $P(4;-2;1)$  и  $Q(2;4;-3)$ .

*Решение.* Точка  $O(0;0;0)$  – начало координат. Применяя уравнение (4) плоскости, проходящей через три данные точки  $O, P$  и  $Q$ , запишем

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4-0 & -2-0 & 1-0 \\ 2-0 & 4-0 & -3-0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель по первой строке с использованием формулы (14), получаем уравнение искомой плоскости  $x + 7y + 10z = 0$ .

*Ответ:*  $x + 7y + 10z = 0$ .

**Задание 2.** Даны вершины тетраэдра  $A(-2;0;-4)$ ,  $B(-1;7;1)$ ,  $C(4;-8;-4)$ ,  $D(1;-4;6)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $CD$  и середину ребра  $AB$ .

*Решение.* Обозначим через  $M$  середину ребра  $AB$ , тогда по формулам (1) ее координаты будут иметь вид:

$$M\left(\frac{-2-1}{2}; \frac{0+7}{2}; \frac{-4+1}{2}\right) \text{ или } M\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Уравнение искомой плоскости можно составить, используя уравнение (4) плоскости, проходящей через три данные точки  $D, C$  и  $M$ :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-6 \\ 4-1 & -8+4 & -4-6 \\ -\frac{3}{2}-1 & \frac{7}{2}+4 & -\frac{3}{2}-6 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-6 \\ 3 & -4 & -10 \\ -\frac{5}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель по первой строке с использованием формулы (14), получаем уравнение искомой плоскости  $42x + 19y + 5z + 4 = 0$ .

*Ответ:*  $42x + 19y + 5z + 4 = 0$ .

**Задание 3.** Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек  $P(1; -4; 2)$  и  $Q(7; 1; -5)$ .

*Решение.* Искомая плоскость проходит через точку  $O$  - середину отрезка  $PQ$  перпендикулярно этому отрезку, т.е. вектор  $\overrightarrow{PQ} = (7 - 1; 1 + 4; -5 - 2) = (6; 5; -7)$  является для нее нормальным вектором.

Используя формулы середины отрезка (1), находим

$$O\left(\frac{1+7}{2}; \frac{-4+1}{2}; \frac{2-5}{2}\right) \text{ или } O\left(4; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Применяя уравнение (3) плоскости, проходящей через данную точку  $O$  перпендикулярно данному вектору  $\overrightarrow{PQ}$  можем записать:

$$6(x - 4) + 5\left(y + \frac{3}{2}\right) - 7\left(z + \frac{3}{2}\right) = 0 \text{ или } 6x + 5y - 7z - 27 = 0.$$

*Ответ:*  $6x + 5y - 7z - 27 = 0$ .

**Задание 4.** Написать уравнение плоскости, касательной к сфере

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24 \text{ в точке } M(-1; 3; 0).$$

*Решение.* Из уравнения сферы определяем центр  $C(3; 1; -2)$ . Вектор  $\overrightarrow{CM} = (-1 - 3; 3 - 1; 0 + 2) = (-4; 2; 2)$  является нормальным для касательной плоскости. Тогда, используя уравнение (3) плоскости, проходящей через данную точку  $M$  перпендикулярно данному вектору  $\overrightarrow{CM}$ , уравнение искомой плоскости можем записать:

$$-4(x + 1) + 2(y - 3) + 2(z - 0) = 0 \text{ или } 2x - y - z + 5 = 0.$$

*Ответ:*  $2x - y - z + 5 = 0$ .

**Задание 5.** Вычислить расстояние между параллельными плоскостями  $x - 3y + 2z + 1 = 0$  и  $2x - 6y + 4z + 3 = 0$ .

*Решение.* Выберем произвольным образом на первой плоскости точку  $M(1; 0; -1)$  (координаты точки должны удовлетворять уравнению плоскости  $x - 3y + 2z + 1 = 0$ ).

Вычислим расстояние от точки  $M$  до второй плоскости, используя формулу (7):

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{56}} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

*Ответ:*  $\frac{1}{2\sqrt{14}}$ .

**Задание 6.** Установить расположение плоскости  $2x - 2y - z + 9 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$ .

*Решение.* Из уравнения сферы определяем центр  $C(1; 1; 1)$  и радиус  $R = 2$ . Используя формулу (7), находим расстояние от точки  $C$  до данной плоскости:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 + 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Так как  $d > R$ , то плоскость и сфера не имеют общих точек.

*Ответ:* не имеют общих точек.

**Задание 7.** Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $3x - y + 7z - 4 = 0$  и  $5x + 3y - 5z + 2 = 0$ .

*Решение.* Пусть точка  $M(x; y; z)$  принадлежит искомым плоскостям. Так как расстояния от этой точки до двух заданных плоскостей равны, то на основании формулы (7) можем записать:

$$\frac{|3x - y + 7z - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 7^2}} = \frac{|5x + 3y - 5z + 2|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-5)^2}}$$

или

$$\frac{|3x - y + 7z - 4|}{\sqrt{59}} = \frac{|5x + 3y - 5z + 2|}{\sqrt{59}}$$



или

$$|3x - y + 7z - 4| = |5x + 3y - 5z + 2|.$$

Данное уравнение имеет два решения:

$$3x - y + 7z - 4 = 5x + 3y - 5z + 2 \text{ или } 2x + 4y - 12z + 6 = 0,$$

и

$$3x - y + 7z - 4 = -(5x + 3y - 5z + 2) \text{ или } 4x + y + z - 1 = 0.$$

Ответ:  $2x + 4y - 12z + 6 = 0$  и  $4x + y + z - 1 = 0$ .

**Задание 8.** Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости  $6x - 3y + 2z - 14 = 0$  и отстоящей от нее на расстоянии, равном 3.

*Решение.* Пусть  $\pi$  - плоскость из условия задачи,  $\alpha$  - искомая плоскость, точка  $M(x; y; z)$  - произвольная точка плоскости  $\alpha$ . По формуле (7) расстояние от точки  $M$  до плоскости  $\pi$  можно записать в виде:

$$d = \frac{|6x - 3y + 2z - 14|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|6x - 3y + 2z - 14|}{7}.$$

С другой стороны, по условию задачи  $d = 3$ . Получаем уравнение

$$\frac{|6x - 3y + 2z - 14|}{7} = 3, \text{ или } |6x - 3y + 2z - 14| = 21.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$6x - 3y + 2z - 14 = 21 \text{ или } 6x - 3y + 2z - 35 = 0 (\alpha_1)$$

и

$$6x - 3y + 2z - 14 = -21 \text{ или } 6x - 3y + 2z + 7 = 0 (\alpha_2).$$

Т.е. существует две плоскости, параллельных  $\pi$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном 3.

Ответ:  $6x - 3y + 2z - 35 = 0$  и  $6x - 3y + 2z + 7 = 0$ .

**Задание 9.** Найти угол между плоскостями  $2x - 6y + 14z - 1 = 0$  и  $5x - 15y + 35z - 3 = 0$ .

*Решение.* Обозначим через  $\varphi$  искомый угол, тогда по формуле (6) находим

$$\cos \varphi = \frac{|2 \cdot 5 + (-6) \cdot (-15) + 14 \cdot 35|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + 14^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-15)^2 + 35^2}} = \frac{590}{590} = 1, \text{ откуда } \varphi = 0.$$

Ответ: 0.

**Задание 10.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(5; -1; -3)$  параллельно прямой  $l$ :  $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$

*Решение.* Направляющий вектор  $\vec{l}$  прямой  $l$  согласно формулам (12) имеет координаты:

$$\vec{l} = \left( \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \right) = (2; 6; -22).$$

Так как искомая прямая проходит параллельно прямой  $l$ , то ее направляющим вектором будет также вектор  $\vec{l}$ . Используя формулу (8), запишем канонические уравнения искомой прямой, проходящей через точку  $M_0$  параллельно вектору  $\vec{l}$ :

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{-22} \text{ или } \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}.$$

Ответ:  $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}$ .

**Задание 11.** Найти точку пересечения и угол между прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ и плоскостью } 3x - y + 2z + 5 = 0.$$

*Решение.* Введем обозначения:  $\pi$  - заданная плоскость,  $l$  - заданная прямая,  $O$  - точка пересечения прямой и плоскости, т.е.  $\{O\} = \pi \cap l$ ,  $\varphi$  - угол между прямой и плоскостью.

1.

Находим точку пересечения прямой и плоскости, для чего составляем и решаем систему:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 5 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1} \end{cases}.$$

Заменим в системе канонические уравнения прямой  $l$  на параметрические:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 5 = 0 \\ x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = t + 2 \end{cases}.$$

Подставляя в первое уравнение системы  $x, y, z$  из последних трех уравнений, получаем

$$3(2t + 1) - (t - 2) + 2(t + 2) + 5 = 0,$$

или  $7t + 14 = 0$ , откуда  $t = -2$ , это и есть значение параметра  $t$ , соответствующего точке  $O$ . Следовательно, ее координаты будут равны:

$$x = 2 \cdot (-2) + 1 = -3, y = -2 - 2 = -4, z = -2 + 2 = 0.$$

2. Находим угол между прямой и плоскостью. Из данных в условии задачи уравнений определяем нормальный вектор  $\vec{n}$  плоскости  $\pi$  и направляющий вектор  $\vec{l}$  прямой  $l$ :  $\vec{n} = (3; -1; 2)$ ,  $\vec{l} = (2; 1; 1)$ . Применяя формулу (13) приложения, находим

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{6},$$

$$\text{откуда } \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{6}$$

Ответ:  $O(-3; -4; 0)$ ,  $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{6}$ .

## Варианты индивидуальных заданий

### Вариант 1

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(6; -1; 5)$ ,  $M_2(-1; 2; 7)$ ,  $M_3(4; 0; 3)$ .

2. Даны вершины  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(-1; 0; 3)$ ,  $C(5; 0; 0)$  и  $B_1(2; 0; 1)$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $C_1 C$  и диагональ  $A_1 C_1$ .

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $Q(3; -2; 4)$  параллельно плоскости  $x - 5y + 3z - 2 = 0$ .

4. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от концов отрезка  $AB$ , где  $A(7; -1; -2)$ ,  $B(-3; 1; 3)$ .

5. Вычислить расстояние между плоскостями  $3x + 5y - z + 11 = 0$  и  $3x + 5y - z - 5 = 0$ .

6. Установить расположение плоскости  $x - 2y + z - 5 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 5$ .

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $3x - 2y + 3z - 5 = 0$  и  $2x + 3y - 3z + 1 = 0$ .

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $2x - y + 2z - 4 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном 5.

9. Найти угол между плоскостями  $x - 3y + 5 = 0$  и  $2x - y + 5z - 16 = 0$ .

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2; -1; 3)$  параллельно прямой  $l$ :  $\begin{cases} 2x + 5y - z - 3 = 0, \\ x + y - z - 4 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$  и плоскостью  $x + 2y + 3z - 14 = 0$ .

### Вариант 2

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(1; 0; 0)$ ,  $Q(1; 3; 0)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (3; -2; 1)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(4; 0; 3)$ ,  $B(-2; 1; 5)$ ,  $C(7; 1; 2)$ ,  $D(0; 4; 1)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AB$  параллельно ребру  $CD$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $K(-1; 2; 0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{p} = (3; 4; 5)$ .
4. Написать уравнение плоскости, которая касается сферы  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 5)^2 = 3$  в точке  $M_0(3; -2; 6)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $2x - 11y + 10z - 13 = 0$  и  $2x - 11y + 10z + 6 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $6x - 3y + 2z + 49 = 0$  относительно сферы  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 15$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x - 2y + 7z - 16 = 0$  и  $7x + y - 2z - 3 = 0$ .
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами  $S(0; 1; 3)$ ,  $A(-3; 5; 1)$ ,  $B(-2; 1; 5)$ ,  $C(1; 1; -4)$ , опущенную из вершины  $S$  на основание  $ABC$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x - 3y + z - 1 = 0$  и  $x + z - 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(1; 0; 4)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x + 3y - 4z - 1 = 0, \\ 4x - y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$  и плоскостью  $x + 2y - 5z + 20 = 0$ .

### Вариант 3

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(1; 1; -2)$ ,  $B(1; -3; -2)$  и  $C(11; 0; 7)$ .
2. Даны вершины  $A(5; 2; 0)$ ,  $B(0; 1; 1)$ ,  $C(-2; 1; 7)$  и  $A_1(3; 1; 2)$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро  $C_1 C$  параллельно диагонали  $BD$ .
3. Точка  $P(3; 2; 1)$  – основание высоты четырехугольной пирамиды, опущенной из вершины  $S(5; -3; 2)$  на основание. Написать уравнение плоскости, содержащей основание пирамиды.
4. Написать уравнение касательной плоскости к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 34$  в точке  $L(-3; 4; 3)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x + 2y - z + 5 = 0$  и  $x + 2y - z - 7 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x + 6y + 5z - 25 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $7x - y - 3z + 4 = 0$  и  $3x + 5y - 5z - 4 = 0$ .
8. На оси  $Oz$  найти точку, равноудаленную от точки  $M(3; 1; 2)$  и плоскости  $3x - y + 5z - 11 = 0$ .
9. Найти угол между плоскостями  $4x - 5y + 3z - 1 = 0$  и  $x - 4y - z + 9 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(0; 1; -3)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 4x - 3y + 5z - 1 = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$  и плоскостью  $x - 3y + 7z - 24 = 0$ .

#### Вариант 4

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки  $M_1(7; 0; 5), M_2(0; 11; 2)$ .

2. Даны вершины тетраэдра  $A(2; -7; 0), B(3; 5; 6), C(4; 1; 3), D(-2; -5; 3)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AB$  и середину ребра  $CD$ .

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $Q(2; -2; 5)$  параллельно плоскости  $x - 5y + 3z - 16 = 0$ .

4. Написать уравнение плоскости, которая касается сферы  $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 + (z - 6)^2 = 14$  в точке  $P(3; -2; 5)$ .

5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x + y - z - 4 = 0$  и  $x + y - z + 5 = 0$ .

6. Установить расположение плоскости  $x + 3y - z + 7 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 6$ .

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $5x - y + 3z + 6 = 0$  и  $x + 3y - 5z - 2 = 0$ .

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $10x + 2y - 11z - 5 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном 7.

9. Найти угол между плоскостями  $3x - y + 2z + 15 = 0$  и  $5x + 9y - 3z - 1 = 0$ .

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-2; 1; 5)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x + y + z - 11 = 0, \\ 9x - 2y + z - 5 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$  и плоскостью  $2x - y + 4z = 0$ .

#### Вариант 5

1. Можно ли провести плоскость через точки  $K(3; 1; 5), M(0; 0; -2), L(1; -4; 0), P(-6; 3; 1)$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Даны вершины  $A(3; 4; 5), B(3; -5; 0), C(0; 1; 4)$  и  $D_1(6; 0; -7)$  параллелепипеда  $ABCCDA_1B_1C_1D_1$ . Составить уравнение плоскости, содержащей грань  $AA_1D_1D$ .

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через основание  $P(3; -7; 0)$  перпендикуляра, проведенного через начало координат к этой плоскости.

4. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 18$  в точке  $C(-3; 2; 5)$ .

5. Вычислить расстояние между плоскостями  $2x - y + 3z - 1 = 0$  и  $2x - y + 3z + 3 = 0$ .

6. Установить расположение плоскости  $3x - y + z - 2 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $3x - 4y + z - 1 = 0$  и  $4x + 3y - z + 4 = 0$ .

8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами  $S(1; 1; 1), A(0; 0; 2), B(0; 1; 0), C(3; 0; 1)$ , опущенную из вершины  $S$  на основание  $ABC$ .

9. Найти угол между плоскостями  $6x + 2y - 4z + 17 = 0$  и  $9x + 3y - 6z - 4 = 0$ .

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2; 0; -1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x + 7y - 2z + 5 = 0, \\ 2x - y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$  и плоскостью  $3x + y - 5z - 12 = 0$ .

### Вариант 6

1. Можно ли провести плоскость через точки  $K(7; -3; 6)$ ,  $M(1; 8; -3)$ ,  $L(4; 5; 0)$ ,  $P(5; 3; 2)$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Даны вершины тетраэдра  $A(-2; 1; 5)$ ,  $B(0; 4; 1)$ ,  $C(2; 1; 7)$ ,  $D(4; 0; -3)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $BC$  и середину ребра  $AD$ .
3. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от концов отрезка  $PQ$ , где  $P(7; 5; 2)$ ,  $Q(-1; 3; 4)$ .
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(7; -2; -6)$  перпендикулярно вектору  $\vec{p} = (11; 4; 2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x + y + 3z - 5 = 0$  и  $x + y + 3z + 4 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x - 2y + z - 1 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 6$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + 2y - 3z + 1 = 0$  и  $3x - y + 2z - 1 = 0$ .
8. Вычислить высоту тетраэдра с вершинами  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(-1; 0; 3)$ ,  $C(2; 0; -1)$ ,  $D(1; 1; -1)$ , опущенную из вершины  $A$  на грань  $B CD$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$  и  $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; 3; 0)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x - y - 7z + 1 = 0, \\ 5x - 5y - z = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$  и плоскостью  $x + 3y - 5z + 9 = 0$ .

### Вариант 7

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(1; 0; 0)$ ,  $K(0; -2; 3)$  и  $L(6; 0; 1)$ .
2. Даны вершины  $A(0; 1; 0)$ ,  $B(-1; 0; 3)$ ,  $C(7; 0; 0)$  и  $A_1(2; 0; -1)$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через диагональ  $BD$  и середину ребра  $AA_1$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(3; -7; 0)$  параллельно плоскости  $3x - 2y + 6z - 17 = 0$ .
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка  $MN$  перпендикулярно ему, если  $M(5; 0; 4)$ ,  $N(-3; 6; 2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $3x + y - 2z + 4 = 0$  и  $3x + y - 2z - 1 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x - 2y + 3z + 5 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + 2y + z = 0$  и  $2x - y + z + 3 = 0$ .

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $x - y + 5z - 1 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{27}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $3y - z = 0$  и  $2y + z = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(1; -3; -1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 3x - y + z - 8 = 0, \\ 5x + y - 4z + 2 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$  и плоскостью  $x - 2y + 5z + 17 = 0$ .

### Вариант 8

1. Можно ли провести плоскость через точки  $A(2; 1; -1)$ ,  $B(1; -1; 2)$ ,  $C(0; 4; -2)$ ,  $D(3; 1; -2)$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(0; 0; 0)$ ,  $M_2(1; 2; 3)$  и  $M_3(0; 3; 6)$ .
3. Точка  $P(2; -1; 1)$  служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.
4. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$  в точке  $M_0(2; 1; -3)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x + y + z + 1 = 0$  и  $x + y + z - 2 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x - y + z - 3 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + y - 3z + 2 = 0$  и  $3x - y + z - 1 = 0$ .
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами  $S(0; 0; 0)$ ,  $A(1; -1; 1)$ ,  $B(2; 0; -1)$ ,  $C(0; 0; -3)$ , опущенную из вершины  $S$  на основание  $ABC$ .
9. Найти угол между плоскостями  $6x + 3y - 2z = 0$  и  $x + 2y + 6z - 12 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(3; -1; 2)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + z + 3 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$  и плоскостью  $x - 2y + 4z - 19 = 0$ .

### Вариант 9

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(2; 3; 1)$ ,  $K(3; 1; 4)$ ,  $L(-2; 1; 5)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(-2; 1; 0)$ ,  $B(1; -3; -5)$ ,  $C(6; -3; 4)$ ,  $D(0; -7; 8)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AB$  и середину ребра  $CD$ .
3. Составить уравнение плоскости, зная, что точка  $M(2; 5; -4)$  служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.
4. Написать уравнение плоскости, которая касается сферы  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 35$  в точке  $A(2; -1; 2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x - 3y + z - 5 = 0$  и  $x - 3y + z + 1 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x + 2y - z + 1 = 0$  относительно сферы  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 8$ .

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $2x - 3y - z - 5 = 0$  и  $3x + y - 2z + 1 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $x - 2y + z - 5 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{6}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x + 2y + 2z - 3 = 0$  и  $16x + 12y - 15z - 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; 3; 6)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x - 2y - 3z + 1 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $2x - y + 3z + 23 = 0$ .

### Вариант 10

1. Проверить, можно ли провести плоскость через точки  $M_1(3; 1; 0)$ ,  $M_2(0; 7; 2)$ ,  $M_3(-1; 0; -5)$ ,  $M_4(4; 1; 5)$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $K(2; -1; 3)$ ,  $M(3; 1; 2)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (3; -1; 4)$ .
3. Точка  $K(2; 3; 1)$  - основание перпендикуляра  $MK$ , опущенного из точки  $M(-1; 4; 5)$  на плоскость. Написать уравнение этой плоскости.
4. Точка  $B(3; 2; 0)$  принадлежит сфере  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 21$ . Написать уравнение плоскости, касающейся сферы в этой точке.
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x - 5y + z - 2 = 0$  и  $x - 5y + z + 3 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x + y + z - 3 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + y - 3z + 3 = 0$  и  $3x - y + z - 2 = 0$ .
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами  $S(1; 1; 1)$ ,  $A(0; 0; 3)$ ,  $B(-1; 0; 2)$ ,  $C(0; 0; 0)$ , опущенную из вершины  $S$  на основание  $ABC$ .
9. Найти угол между плоскостями  $2x - y + 5z + 16 = 0$  и  $x + 2y + 3z + 8 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(5; 0; -2)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - 3y + z + 4 = 0, \\ 5x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$  и плоскостью  $2x - 3y - 5z - 7 = 0$ .

### Вариант 11

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки  $M_1(2; 1; 1)$  и  $M_2(-3; 0; 4)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(5; 1; 3)$ ,  $B(1; 6; 2)$ ,  $C(5; 0; 4)$ ,  $D(7; 0; 6)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AB$  параллельно ребру  $CD$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через основание  $M_0(3; 6; 4)$  перпендикуляра, проведенного из начала координат.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 4; 5)$  параллельно плоскости  $2x - y + 3z - 5 = 0$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x - 2y + 3z - 4 = 0$  и  $x - 2y + 3z + 5 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x + y - z + 15 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x - 3y + 2z - 4 = 0$  и  $2x + y - 3z + 1 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $5x - y + 3z - 1 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{35}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $2x + 2y + z - 1 = 0$  и  $x + z - 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(11; 3; -1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 3x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ 2x - 3y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$  и плоскостью  $4x + 2y - z - 11 = 0$ .

### Вариант 12

1. Можно ли провести плоскость через точки  $A(6; 1; 0)$ ,  $B(3; 0; 4)$ ,  $C(5; 2; 7)$ ,  $D(2; 1; 2)$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Даны вершины тетраэдра  $A(2; 1; 0)$ ,  $B(1; 3; 5)$ ,  $C(6; 3; 4)$ ,  $D(0; -7; 8)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AC$  параллельно ребру  $BD$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка  $AB$  перпендикулярно ему, если  $A(0; -1; 2)$  и  $B(2; -1; 3)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  в точке  $M(-6; 3; -2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $7x - 3y + z + 4 = 0$  и  $7x - 3y + z - 5 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x - y + 3z - 1 = 0$  относительно сферы  $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 5$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $5x + y - z + 3 = 0$  и  $x + y + 5z - 1 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $2x + 3y - z + 2 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{14}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $3x + y + z - 4 = 0$  и  $y + z + 5 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(7; -1; 2)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x - 5y + 6z - 6 = 0, \\ 5x - y - 4 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$  и плоскостью  $3x - 2y - 4z - 8 = 0$ .

### Вариант 13

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(2; 3; -1)$ ,  $K(5; 2; 0)$  параллельно отрезку  $AB$ , где  $A(3; 6; 1)$ ,  $B(1; -1; 0)$ .
2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $K(-1; 3; 1)$  параллельно плоскости  $Oyz$ .



3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(3; 0; 4)$  параллельно плоскости  $3x - 2y + 5z - 3 = 0$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 6$  в точке  $M(1; -3; 2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x - 11y + 3z + 5 = 0$  и  $x - 11y + 3z - 2 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $2x + y - 2z + 15 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + 5y - 2z + 3 = 0$  и  $2x - y + 5z - 2 = 0$ .
8. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из точки  $Q(3; -1; 0)$  на плоскость  $5x + y - 4z + 2 = 0$ .
9. Найти угол между плоскостями  $3x - 2y - 2z - 16 = 0$  и  $x + y - 3z - 7 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(0; 0; 1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0, \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$  и плоскостью  $x + 2y - z - 2 = 0$ .

#### Вариант 14

1. Можно ли провести плоскость через точки  $M(6; 1; 0)$ ,  $N(3; 0; 4)$ ,  $P(5; 2; 7)$ ,  $Q(2; -1; \frac{10}{4})$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Даны вершины  $A(4; 0; 2)$ ,  $B(0; 5; 1)$ ,  $C(4; -1; 3)$  и  $A_1(3; -1; 5)$  параллелепипеда  $ABCC_1D_1A_1B_1C_1D_1$ . Написать уравнение плоскости, содержащей грань  $BB_1C_1C$ .
3. Даны вершины тетраэдра  $A(5; 1; 3)$ ,  $B(1; 6; 2)$ ,  $C(5; 0; 4)$ ,  $D(3; 0; 6)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через середину ребра  $AB$  перпендикулярно ему.
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $Q(3; -4; 5)$  параллельно плоскости  $x - 2y - 3z + 5 = 0$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $3x - 5y + z - 6 = 0$  и  $3x - 5y + z + 3 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $3x - 2y + z - 8 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 4$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x - y - 7z + 1 = 0$  и  $5x + 5y - z - 3 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $x - 2y - 2z + 3 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном 2.
9. Найти угол между плоскостями  $2x + 2y + z + 9 = 0$  и  $x - y + 3z - 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(3; -2; 1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0, \\ 3x - 2y + 3z - 5 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$  и плоскостью  $5x - y + 4z + 3 = 0$ .

#### Вариант 15

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(2; -5; 1)$ ,  $M_2(3; 4; -2)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (2; -1; 3)$ .
2. Даны вершины  $A(7; 1; 6)$ ,  $B(0; 2; 7)$ ,  $C(0; 1; 5)$  и  $A_1(-3; 7; 1)$  параллелепипеда  $ABCC_1A_1B_1C_1D_1$ . Написать уравнение плоскости, содержащей грань  $AA_1D_1D$ .
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через основание  $K(5; -1; 3)$  перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.
4. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 20$  в точке  $P(-3; -1; 2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $2x - y - 3z + 1 = 0$  и  $2x - y - 3z - 4 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x + 2y - z + 5 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $7x - 2y + z - 3 = 0$  и  $x + 7y - 2z + 5 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $3x + y - 5z + 4 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{35}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x + 2y + 2z - 3 = 0$  и  $2x - y + 2z + 5 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(4; 0; 1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 5x - y - 4 = 0, \\ x - 5y + 6z = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$  и плоскостью  $x + 3y + 5z - 42 = 0$ .

### Вариант 16

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(11; -2; 3)$ ,  $K(1; 4; -3)$ ,  $L(1; 0; -1)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(5; 1; 3)$ ,  $B(2; 1; -6)$ ,  $C(-5; 0; 4)$ ,  $D(3; 0; -6)$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через середину ребра  $CD$  параллельно грани  $ABD$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $K(2; -1; 3)$  параллельно плоскости  $2x - 3y + 5z + 2 = 0$ .
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через основание  $B(3; -2; 5)$  перпендикуляра, проведенного из точки  $A(2; 1; -7)$  к этой плоскости.
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $7x + y + z - 1 = 0$  и  $7x + y + z + 5 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $11x - 3y + 5z - 1 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $3x - 5y + z - 4 = 0$  и  $5x + y + 3z + 2 = 0$ .
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами  $S(3; 0; 0)$ ,  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; -1; 0)$ ,  $C(-1; -1; -2)$ , опущенную из вершины  $S$  на основание  $ABC$ .
9. Найти угол между плоскостями  $3x + 2y - 3z - 1 = 0$  и  $x + y + z - 7 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-3; 0; 1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z + 3 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2}$  и плоскостью  $7x + y + 4z - 47 = 0$ .

### Вариант 17

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(3; 4; -2)$ ,  $Q(-1; 0; 1)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (2; -1; 0)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(3; -1; 5)$ ,  $B(1; 1; 0)$ ,  $C(2; -1; 5)$ ,  $D(-7; 3; 0)$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AB$  параллельно ребру  $CD$ .
3. Написать уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно отрезку  $PQ$  через его середину, если  $P(11; -2; 3)$ ,  $Q(-1; 4; 3)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 50$  в точке  $M(4; -3; 5)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x - 9y + z - 5 = 0$  и  $x - 9y + z + 2 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $9x - 2y + z - 5 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 5)^2 = 8$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $4x - 3y + 5z - 1 = 0$  и  $5x + 3y - 4z + 2 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $5x - y + z - 8 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{27}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x - 3y - 2z - 8 = 0$  и  $x + y - z + 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(5; 2; -1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 5x - 2y - 4z = 0, \\ 2x - 3y + z + 4 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$  и плоскостью  $2x + 3y + 7z - 52 = 0$ .

### Вариант 18

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(1; 0; -1)$ ,  $Q(0; 1; 3)$ ,  $L(1; -2; 3)$ .
2. Даны вершины  $A(4; 0; 1)$ ,  $B(0; 5; 3)$ ,  $C(4; -1; 3)$  и  $C_1(5; -1; 3)$  параллелепипеда  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Написать уравнение плоскости, содержащей грань  $AA_1B_1B$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 3; -4)$  параллельно плоскости  $2x - y + 5z - 1 = 0$ .
4. Точка  $Q(1; 2; -5)$  – основание высоты правильной четырехугольной пирамиды, опущенной из вершины  $S(3; 4; -1)$  на основание. Написать уравнение плоскости, содержащей основание пирамиды.
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $3x + 8y - z + 1 = 0$  и  $3x + 8y - z + 3 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x + y + z - 11 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $4x - y + 3z - 1 = 0$  и  $x + 3y - 4z + 5 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $x - 2y - 2z + 3 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном 7.
9. Найти угол между плоскостями  $3x - 2y + 3z + 23 = 0$  и  $y + z + 5 = 0$ .

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-2; 0; 1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 2y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$  и плоскостью  $3x + 4y + 7z - 16 = 0$ .

### Вариант 19

1. Можно ли провести плоскость через точки  $P(3; 1; 0)$ ,  $R(0; 0; -1)$ ,  $Q(4; 1; 2)$ ,  $L(2; 1; -2)$ ? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Даны вершины тетраэдра  $A(3; 1; 0)$ ,  $B(-1; 5; 2)$ ,  $C(4; 0; 1)$ ,  $D(-2; 3; 1)$ . Написать уравнение плоскости, содержащей грань  $ABD$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $K(3; -5; 0)$ , перпендикулярно вектору  $\vec{a} = (-3; 6; 4)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 38$  в точке  $M(0; 1; 3)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $7x - 4y + 3z - 3 = 0$  и  $7x - 4y + 3z + 2 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $x - 2y + 2z - 1 = 0$  относительно сферы  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 6$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $8x - 3y + 5z - 1 = 0$  и  $5x + 8y - 3z + 1 = 0$ .
8. Вычислить высоту тетраэдра с вершинами  $A(1; 0; 3)$ ,  $B(-1; 2; 3)$ ,  $C(0; 0; 3)$ ,  $D(1; 0; 0)$ , опущенную из вершины  $B$  на грань  $ACD$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x + y + 3z - 7 = 0$  и  $y + z - 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(1; -3; 0)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - y + z + 3 = 0, \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $2x - 5y + 4z + 24 = 0$ .

### Вариант 20

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $C(3; -4; 1)$ ,  $B(-2; 1; 3)$  параллельно вектору  $\vec{p} = (5; 0; -1)$ .
2. Даны вершины  $A(2; -5; 0)$ ,  $C(0; -1; 0)$ ,  $D(1; 0; 0)$  и  $D_1(3; 0; 1)$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Написать уравнение плоскости, содержащей грань  $A_1 B_1 C_1 D_1$ .
3. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от концов отрезка  $BC$ , если  $B(5; -2; 1)$ ,  $C(-1; 3; 4)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  в точке  $P(3; -1; 2)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x + y + z + 7 = 0$  и  $x + y + z - 3 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $8x - y + 7z - 3 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $5x - 6y + z - 2 = 0$  и  $6x + y - 5z + 3 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $x - y - z - 3 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{3}$ .

9. Найти угол между плоскостями  $x - 2y + 2z + 17 = 0$  и  $x - 2y - 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; -3; 1)$  параллельно прямой  $l$ :  $\begin{cases} x + y - z - 4 = 0, \\ 2x + 5y - z - 3 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$  и плоскостью  $x - 2y - 3z + 18 = 0$ .

### Вариант 21

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $P(1; 0; 0)$ ,  $Q(0; -1; 0)$ ,  $L(2; 0; 1)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(3; 1; 2)$ ,  $B(4; 1; 5)$ ,  $C(8; 0; 1)$ ,  $D(1; 7; 2)$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AD$  параллельно ребру  $BC$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 3; 5)$  параллельно плоскости  $3x - 2y + z + 8 = 0$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 46$  в точке  $M(6; -1; 3)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x + 6y - 5z - 1 = 0$  и  $x + 6y - 5z + 3 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $3x - 11y + z - 10 = 0$  относительно сферы  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 35$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x - 7y + 3z - 2 = 0$  и  $5x + 3y - 5z + 4 = 0$ .
8. Вычислить высоту тетраэдра с вершинами  $A(3; 1; 5)$ ,  $B(1; 0; 6)$ ,  $C(5; 0; 4)$ ,  $D(0; 1; 2)$ , опущенную из вершины  $D$  на грань  $ABC$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x + 2y - 1 = 0$  и  $x + y + 6 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-3; -1; -2)$  параллельно прямой  $l$ :  $\begin{cases} 5x - 5y - z - 3 = 0, \\ x - y - 7z + 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$  и плоскостью  $x + 7y + 3z + 11 = 0$ .

### Вариант 22

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(1; -3; 2)$ ,  $N(-4; 0; 1)$  параллельно вектору  $\vec{p} = (3; 5; 0)$ .
2. Даны вершины  $A(4; 0; 1)$ ,  $B(0; 5; 3)$ ,  $C(4; -1; 3)$  и  $C_1(5; -1; 3)$  параллелепипеда  $ABCC_1A_1B_1C_1D_1$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AA_1$  и диагональ  $A_1C$ .
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка  $AB$  перпендикулярно ему, если  $A(1; 0; 7)$ ,  $B(3; 4; -1)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 29$  в точке  $E(3; 1; 5)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $2x - 3y + z - 16 = 0$  и  $2x - 3y + z - 3 = 0$ .

6. Установить расположение плоскости  $4x - 3y + 5z - 25 = 0$  относительно сферы  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 15$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $2x - 5y - z - 1 = 0$  и  $5x + y + 2z + 3 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $2x - 3y + z + 11 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{14}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $2x - z + 5 = 0$  и  $2x + 3y - 7 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(6; -1; 3)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 2x - y - 3z + 1 = 0, \\ x + 7y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$  и плоскостью  $3x + 7y - 5z - 11 = 0$ .

### Вариант 23

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(2; 0; 3)$ ,  $N(0; 0; 5)$  параллельно вектору  $\vec{p} = (-3; 1; 0)$ .
2. Даны вершины  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(0; -2; 1)$ ,  $C(3; -5; 1)$  и  $C_1(0; -6; 0)$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Написать уравнение диагональной плоскости  $BB_1 D_1 D$ .
3. Составить уравнение плоскости, параллельно плоскости  $x - 7y - 4z + 9 = 0$  и проходящей через точку  $K(3; 1; 5)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 21$  в точке  $S(1; -2; 4)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $2x - 3y + 5z - 11 = 0$  и  $2x - 3y + 5z + 6 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $9x + y - 10z - 29 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 35$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $3x + 6y - 4z + 13 = 0$  и  $4x - 3y - 6z - 11 = 0$ .
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами  $S(1; 5; -2)$ ,  $A(-1; 0; 3)$ ,  $B(1; 3; 0)$ ,  $C(0; 5; 0)$ , опущенную из вершины  $S$  на основание  $ABC$ .
9. Найти угол между плоскостями  $5x + 3y + z - 18 = 0$  и  $2y + z - 9 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-5; 0; 2)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 9x - 2y + z - 17 = 0, \\ x + y + z - 11 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$  и плоскостью  $4x + y - 6z - 5 = 0$ .

### Вариант 24

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M(0; 0; -7)$ ,  $N(-1; 0; 1)$ ,  $P(4; 1; 5)$ .

2. Даны вершины  $A(-3; 1; 0)$ ,  $B(4; 0; 5)$ ,  $C(2; 1; 3)$  и  $A_1(3; 1; 1)$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $CC_1$  параллельно диагонали  $BD$ .
3. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от концов отрезка  $CD$ , если  $C(-3; 4; 5)$ ,  $D(-7; 2; 3)$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 35$  в точке  $K(3; -1; 5)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $3x - 5y + z - 3 = 0$  и  $3x - 5y + z + 2 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $2x + y - z + 3 = 0$  относительно сферы  $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 2)^2 = 21$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + 7y - 5z + 1 = 0$  и  $5x - y - 7z + 8 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $5x + 7y - z + 6 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $5\sqrt{3}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $4x + 3z - 2 = 0$  и  $x + 2y + 2z + 5 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(3; -11; 1)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} x - y - 2z = 0, \\ 4x - 3y + 5z - 1 = 0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0}$  и плоскостью  $5x + 9y + 4z - 25 = 0$ .

### Вариант 25

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $K(3; 1; 2)$ ,  $L(0; 1; -2)$  параллельно вектору  $\vec{a} = (3; 0; 5)$ .
2. Даны вершины тетраэдра  $A(1; 3; 0)$ ,  $B(6; -1; 5)$ ,  $C(-1; 0; 8)$ ,  $D(1; 5; -2)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро  $CD$  параллельно ребру  $AB$ .
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(3; 7; 4)$  параллельно плоскости  $2x - 3y + z - 16 = 0$ .
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере  $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 7)^2 = 12$  в точке  $A(-3; 4; 5)$ .
5. Вычислить расстояние между плоскостями  $x - 3y + 5z - 8 = 0$  и  $x - 3y + 5z + 2 = 0$ .
6. Установить расположение плоскости  $11x - y + 3z - 4 = 0$  относительно сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями  $x + 6y + z - 3 = 0$  и  $6x - y - z + 5 = 0$ .
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости  $3x - 2y + 5z - 3 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии, равном  $\sqrt{38}$ .
9. Найти угол между плоскостями  $x + 4y - z + 1 = 0$  и  $2x + y + 4z - 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2; 1; -7)$  параллельно прямой  $l: \begin{cases} 4x - y + 3z + 2 = 0, \\ x + 3y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой  $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$  и плоскостью  $x + 4y + 13z - 23 = 0$ .

### Приложение

✓ Формулы середины отрезка:  
если  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  и  $O$  – середина отрезка  $AB$ , то

$$O \left( \frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2} \right) \quad (1)$$

✓ Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

✓ Уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно данному вектору  $\vec{n} = (A; B; C)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

✓ Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

✓ Уравнение плоскости, проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно двум данным неколлинеарным векторам  $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$ ,  $\vec{m} = (m_1; m_2; m_3)$  (каноническое уравнение плоскости):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

✓ Угол между двумя плоскостями:

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6)$$

✓ Расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7)$$

✓ Уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно данному вектору  $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$  (канонические уравнения прямой):

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3} \quad (8)$$

✓ Уравнение прямой, проходящей через данную точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно данному вектору  $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$  (параметрические уравнения прямой):

$$\begin{cases} x = l_1 t + x_0 \\ y = l_2 t + y_0 \\ z = l_3 t + z_0 \end{cases} \quad (9)$$

✓ Уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_3-z_1} \quad (10)$$



✓ Общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

в этом случае координаты направляющего вектора  $\vec{l}$  прямой имеют вид:

$$\vec{l} = \left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

или

$$\vec{l} = (B_1C_2 - C_1B_2; -(A_1C_2 - C_1A_2); A_1B_2 - B_1A_2) \quad (12)$$

✓ Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|A_1l_1 + B_1l_2 + C_1l_3|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}} \quad (13)$$

✓ Формула раскрытия определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \\ = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (14)$$

## ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине  
«Математика» для всех направлений подготовки и форм обучения

### 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

При объяснении студентам теоретического вопроса, необходимо доступно изложить определение предела на примере числовой последовательности. Обязательным является повторение различных способов преобразования алгебраических дробей для упрощения выражений. Вспомнить такие способы, как вынесение общего множителя за скобку, приведение дроби к общему знаменателю, разложение квадратного трехчлена на множители, умножение на сопряженное значение. Необходимо уделить большое внимание повторению формул сокращенного умножения. Важно предоставить студентам возможность овладеть способами преобразования выражений для решения пределов сложных функций, прежде чем перейти к изучению «первого» и «второго замечательного пределов». Устный счет является обязательной составляющей каждого занятия, так как приучает к рационализации вычислений и аналитической оценке результатов, что имеет значение для более рационального вычисления не только пределов, но и других поставленных задач математического анализа. При закреплении материала, совершенствовании знаний, умений и навыков целесообразно практиковать самостоятельную работу студентов. Домашние задания в разумных пределах являются обязательными для более успешного освоения материала.

### 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

*Последовательностью*  $\{x_n\}$  называется пронумерованное бесконечное множество чисел:  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

Обычно числовую последовательность задают формулой

$$a_n = f(n).$$

*Пример 3.1*

Формула  $a_n = 2n - 1$  числам натурального ряда  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  ставит в соответствие последовательность нечетных чисел  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ .

*Пример 3.2*

Формула  $a_n = \frac{n}{2n+1}$  задает возрастающую последовательность правильных дробей  $\frac{1}{3}$ ,

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots$$

Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  (эпсилон) существует такое положительное число  $N$ , что абсолютная величина разности  $|x_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$ .

Обозначается:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x = a$

**Замечание 3.1** В пределе последовательности «динамическая»  $n$  может стремиться только к «плюс бесконечности».

**Замечание 3.2** Последовательность «дискретна» (прерывна), то есть состоит из отдельных изолированных членов.

**Замечание 3.3** В пределах последовательностей часто встречаются факториалы (свернутая запись произведения) и прогрессии.

*Пример 3.3*

Найдите пределы последовательностей:

а)  $x_n = \frac{4n^3 + 3n + 1}{3 + 2n^2 + 5n^3}$

б)  $x_n = \frac{\sqrt{3n^3 + n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}}$

в)  $x_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{3 + 2n^3}$

*Решение*

Принцип решения: в числителе и знаменателе выносятся члены со старшей степенью  $n$ ,

которые потом сокращаются. 
$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n + 1}{3 + 2n^2 + 5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot \left(4 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n} + 5\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n} + 5} = \frac{4 + 0 + 0}{0 + 0 + 5} = \frac{4}{5}.$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^3 + n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3} \left( \frac{\sqrt{3n^3 + n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} \right)}{\sqrt{n^3} \cdot \left( \sqrt{\frac{n^3 + 1}{n^3}} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{3n^3+n}{n^3}} + \sqrt{\frac{n}{n^3}}}{\sqrt{\frac{n^3+1}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt{3+0} + \sqrt{0}}{\sqrt{1+0}} = \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{3+2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n}{3+2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n^2}{2 \cdot (3+2n^3)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + 1\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{3}{n^3} + 2\right)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^3} + 2\right)} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{0+1}{0+2} = 0. \end{aligned}$$

### 3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует число  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , такое, что для любых  $x \in X$  и удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - x_0| < \delta$  выполняется неравенство (определение на языке « $\varepsilon - \delta$ »).

Это записывается следующим образом:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

*Правила вычисления пределов функций*

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ , где  $c - const$ .

Если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , то справедливы равенства:

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ,

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , в частности  $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot g(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ,

4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ , где  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ ,

5.  $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ .

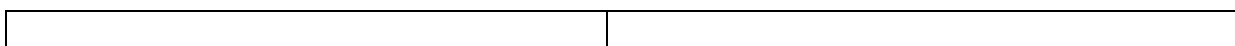
*Случаи, которые могут встретиться при вычислении пределов*

Пусть  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$

Таблица 2

Вычисление предела суммы	Вычисление предела произведения
--------------------------	---------------------------------

$f(x) + g(x)$ <p>1. <math>A, B</math> – конечные числа <math>\Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B.</math></p> <p>2. <math>A = +\infty; B = +\infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [+ \infty + \infty] = +\infty.</math></p> <p>3. <math>A = -\infty; B = -\infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [- \infty - \infty] = -\infty.</math></p> <p>4. <math>A = \infty, B</math> – конечное число <math>\Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [\infty + B] = \infty.</math></p> <p>5. <math>A = +\infty; B = -\infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = [+ \infty - \infty].</math></p>	$f(x) \cdot g(x)$ <p>1. <math>A, B</math> – конечные числа,  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B.</math></p> <p>2. <math>A \neq 0; B = \infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [A \cdot \infty] = \infty.</math></p> <p>3. <math>A = 0; B = \infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [0 \cdot \infty]</math></p> <p>4. <math>A = \infty, B = \infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = [\infty \cdot \infty] = \infty.</math></p>
<p><b>Вычисление предела отношения</b></p> $\frac{f(x)}{g(x)}$ <p>1. <math>A, B</math> – конечные числа, <math>B \neq 0</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.</math></p> <p>2. <math>A \neq 0; B = 0 \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{A}{0} \right] = \infty.</math></p> <p>3. <math>A</math> – конечное число, <math>B = \infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{A}{\infty} \right] = 0.</math></p> <p>4. <math>A = \infty, B</math> – конечное число <math>\Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{\infty}{B} \right] = \infty.</math></p> <p>5. <math>A = 0, B = 0 \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{0}{0} \right].</math></p> <p>6. <math>A = \infty, B = \infty \Rightarrow</math>  <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right].</math></p>	<p><b>Вычисление предела функции</b></p> $(f(x))^{g(x)}$ <p>1. <math>A, B</math> – конечные числа <math>\Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = A^B.</math></p> <p>2. <math>0 &lt; A &lt; 1, B = +\infty \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{+\infty}] = 0.</math></p> <p>3. <math>A &gt; 1, B = +\infty \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{+\infty}] = +\infty.</math></p> <p>4. <math>0 &lt; A &lt; 1, B = -\infty \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{-\infty}] = +\infty.</math></p> <p>5. <math>A &gt; 1, B = -\infty \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{-\infty}] = 0.</math></p> <p>6. <math>A = 1, B = \infty \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [1^\infty]</math></p> <p>7. <math>A = 0, B = 0 \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [0^0]</math></p> <p>8. <math>A = \infty, B = 0 \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [\infty^0]</math></p> <p>9. <math>A</math> – конечное число, <math>B = \pm\infty \Rightarrow</math>  <math>\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{g(x)} = [A^{\pm\infty}]</math> – не существует.</p>



**Замечание 4.1** При подстановке предельного значения аргумента в функцию, иногда получаем неопределенные выражения, символически обозначаемые как  $\left[\frac{0}{0}\right]$ ,  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ,  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[\infty - \infty]$ ,  $[0^0]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[1^\infty]$ .

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Любой предел состоит из трех частей:

- а) Знак *Lim*. Иногда пределы так и называют *лимитами*.
- б) Запись под знаком предела.

Обычно читается «икс стремится к ...». Хотя вместо  $x$  на практике встречаются и другие переменные.

- в) Функция под знаком предела.

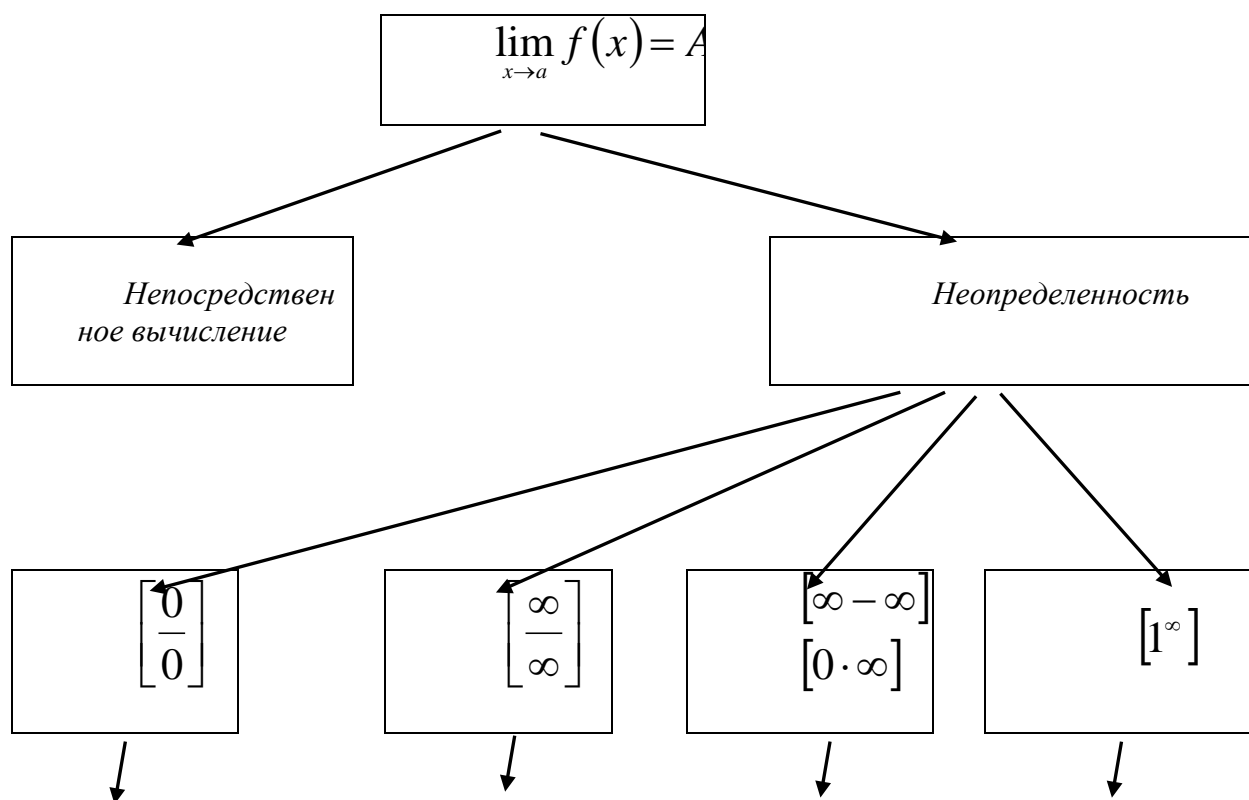
Например, запись  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{3x}$  читается как: «предел функции  $\frac{x+5}{3x}$  при  $x$  стремящемся к единице».

**Замечание 5.1** Если требуется решить предел, то сначала достаточно подставить число, к которому стремится переменная, в функцию.

Например,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{3x} = \frac{1+5}{3 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2$ .

*Рассмотрим схему способов вычисления пределов*

*Схема 1*



<p>1. Алгебраические преобразования. 2. Умножение на сопряженное Выражение. 3. Замена переменной. 4. <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.</math></p>	<p>Деление числителя и знаменателя на <math>x</math> в высшей степени.</p>	<p>Приведение к виду <math>\left[ \frac{0}{0} \right];</math> <math>\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]</math> с помощью преобразований.</p>	<p><math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x</math> <math>\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.</math></p>
--	--	---	--

Обратимся к тактике вычисления пределов, которую рассмотрим на примерах.

*Раскрытие неопределенностей*

### I. Неопределенность вида $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

Основной способ вычисления: каждый элемент числителя и знаменателя необходимо разделить на  $x$  в наибольшей степени (или вынести за скобки в числителе и знаменателе наибольшую степень  $x$  каждого из них).

*Пример 5.1*

Вычислите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 9}{4x^3 - 7}$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 9}{5x + 6}$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{2x^2 - 4x - 9}$

*Решение*

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 9}{4x^3 - 7} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3} + \frac{9}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} - \frac{7}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3}}{4 - \frac{7}{x^3}} = \frac{2 + 0 + 0}{4 - 0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 9}{5x + 6} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} - \frac{9}{x^2}}{\frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}}{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{0 + 0} =$$

$$\frac{2 - 0 - 0}{0 + 0} = \frac{2}{0} = \infty.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 6}{2x^2 - 4x - 9} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x}{x^2} + \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{4x}{x^2} - \frac{9}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{2 - \frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}} = \frac{0 + 0}{2 - 0 - 0} = \frac{0}{2} = 0.$$

**Замечание 5.2** Если сравнить наивысшие степени  $x$  числителя и знаменателя в неопределенностях вида  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ , получаем:

1.  $\infty$ , если степень выше в числителе;
2.  $0$ , если степень выше в знаменателе;
3. отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя, если они равны.

## II. Неопределенность вида $\left[ \frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$ (Дробно-рациональные функции)

Основной способ вычисления: в числителе и знаменателе выделяется множитель  $(x - a)$  и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель.

После этого неопределенность может исчезнуть, в противном случае надо повторить процедуру.

Для разложения на множители используют разные способы: вынесение общего множителя за скобки, деление многочленов, формулы сокращенного умножения и другие тождества.

**Замечание 5.3** Полезно вспомнить следующие формулы:

1.  $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$
2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 - b^3$
5.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$
6.  $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$
7.  $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$
8.  $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

*Пример 5.2*

Вычислите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

*Решение*

а)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5) \cdot (x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10.$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (x-2)}{(x-5) \cdot (x-4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{x-4} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x^2 \cdot (x-2) + (x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x^2 + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

### III. Неопределенность вида $\left[ \frac{0}{0} \right]$ при $x \rightarrow a$ (Дробно-иррациональные функции)

Основной способ вычисления:

а) умножение числителя и знаменателя на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

б) метод замены переменной

*Пример 5.3*

Вычислите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x+1}}$

*Решение*

а) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

б) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ \begin{array}{l} x = t^6 \\ x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{(t-1) \cdot (t^2 + t + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}.$$

в) 
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x+1}} = \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+10} - \sqrt{2x+11}) \cdot (\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (\sqrt[3]{x+1}) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})} =$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\left( (\sqrt{x+10})^2 - (\sqrt{2x+11})^2 \right) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+10 - 2x - 11) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1) \cdot (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}) \cdot (x+1)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+10} + \sqrt{2x+11}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

#### IV. Неопределенность вида $[\infty - \infty]$

Основной способ вычисления: преобразование функции к виду дроби и приведением к неопределенностям  $\left[ \frac{0}{0} \right]$  или  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$ .

*Пример 5.4*

Вычислите следующие пределы:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$

*Решение*

$$\begin{aligned}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x-1) \cdot (x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1}{(x-1) \cdot (x+1)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + 6x} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - x^2}{\sqrt{x^2 \cdot \left( 1 + \frac{6}{x} \right)} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{6}{x}} + x} = 6 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{6}{x}} + 1 \right)} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.
\end{aligned}$$

#### V. Первый замечательный предел

Обычно к первому замечательному пределу сводятся пределы от функций, в которых участвуют тригонометрические выражения.

Первый замечательный предел имеет вид:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Замечание 5.4** Если аргумент  $\sin$  и знаменатель представляют собой одну и ту же функцию, которая стремится к нулю, то имеет место конструкция первого замечательного

предела, т. е.  $\lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$ .

*Пример 5.5*

Вычислите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

г)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\cos^2 x - \cos^2 a}$

*Решение*

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5$ .

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left( \frac{5x}{2} \right)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{25}{4} \cdot \sin \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2} \cdot \frac{5x}{2}} =$   
 $= 2 \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{2}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x \cdot 5x}{5 \cdot 3x \cdot \sin 5x} = \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}$ .

г)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\cos^2 x - \cos^2 a} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\cos^2 x - \cos^2 a) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(\cos x - \cos a) \cdot (\cos x + \cos a) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2 \cos a} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{a}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\cos x - \cos a} =$   
 $= \frac{1}{4 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{-2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \sin \frac{x+a}{2}} = - \frac{1}{8 \cdot \sqrt{a} \cdot \cos a \cdot \sin a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x-a}{2} \cdot 2}{\sin \frac{x-a}{2}} =$   
 $= - \frac{2}{8 \sqrt{a} \cdot \cos a \cdot \sin a} = - \frac{1}{2 \sqrt{a}} = - \frac{1}{2 \sqrt{a} \cdot (2 \cos a \cdot \sin a)} = - \frac{1}{2 \sqrt{a} \cdot \sin 2a}$ .

**Замечание 5.5** Часто также применяют известные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

## VI. Второй замечательный предел

Имеет следующий вид:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Ко второму замечательному часто сводят показательную-степенную неопределенность  $[1^\infty]$

*Пример 5.6*

Вычислите следующие пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x-3}\right)^{4x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{2}{3x}}$

*Решение*

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}} = e^2.$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x-3}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{8} \cdot \frac{8}{4x-3} \cdot 4x} = e^{32 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4x-3}} = e^{\frac{32}{4}} = e^8.$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{2}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x} \cdot \frac{5x}{1} \cdot \frac{2}{3x}} = e^{\frac{10}{3}} = \sqrt[3]{e^{10}}.$

### 5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Функция  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой функцией* при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

Функция  $\beta(x)$  называется *бесконечно большой функцией* при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$ , или  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = +\infty$ , или  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = -\infty$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |\beta(x)| = +\infty$ .

**Замечание 6.1** Если при  $x \rightarrow x_0$   $\beta(x)$  – бесконечно большая функция, то  $\frac{1}{\beta(x)}$  является бесконечно малой функцией; если  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция, то  $\frac{1}{\alpha(x)}$  –

бесконечно большая функция.

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бесконечно малые функции при  $x \rightarrow x_0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A = \text{const}$ ,  $A \neq 0$ ,  $A \neq \infty$ , то функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются

бесконечно малыми функциями одного порядка малости при  $x \rightarrow x_0$ .

В частности, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называют эквивалентными

функциями при  $x \rightarrow x_0$  (записывается  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ ).

Приведем формулы эквивалентных бесконечно малых функций при  $x \rightarrow 0$ :

1.  $\sin x \sim x$
2.  $\operatorname{tg} x \sim x$
3.  $\operatorname{arc} \sin x \sim x$
4.  $\operatorname{arcbg} x \sim x$
5.  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
6.  $\ln(1+x) \sim x$
7.  $e^x - 1 \sim x$
8.  $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1$
9.  $(1+x)^m - 1 \sim m \cdot x$
10.  $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n} \cdot x$

*Пример 6.1*

Вычислите следующие пределы, применяя формулы эквивалентных бесконечно малых функций:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x^2}{\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \ln(1-3x)}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sqrt{1+2x-x^3} - 1}$

*Решение*

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{10x} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ .

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x^2}{\operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \ln(1-3x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\frac{x}{2} \cdot (-3x)} = -\frac{5}{3} = -\frac{10}{3}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sqrt{1+2x-x^3} - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot (2x-x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{4x \cdot (2-x^2)} =$

$= \frac{9}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2-x^2} = \frac{9}{4} \cdot 0 = 0$ .

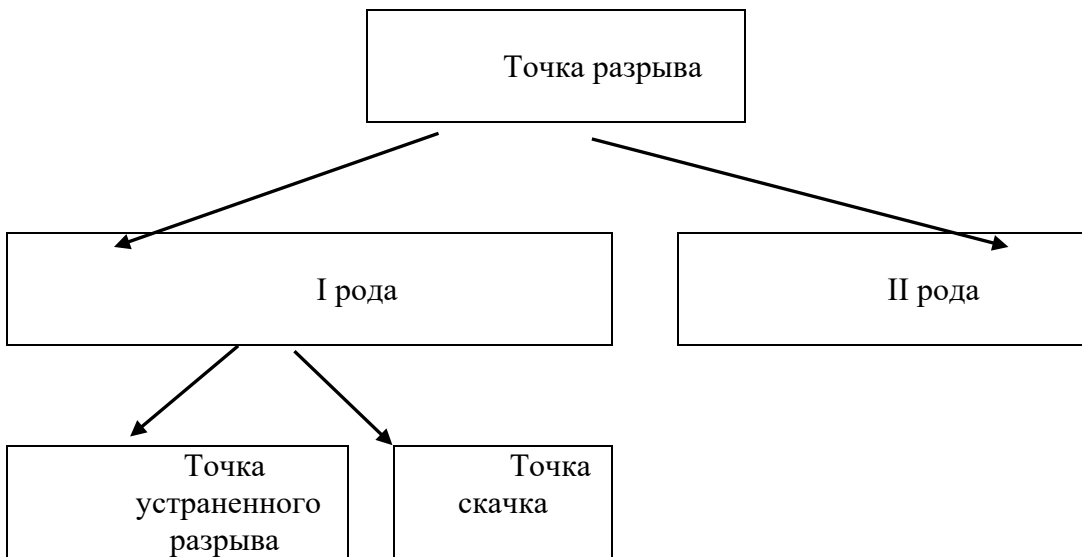
## 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Функция называется *непрерывной* в точке  $x_0$  из области определения функции, если предел ее при  $x \rightarrow x_0$  существует и равен значению в этой точке:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , т.е.

- 1) значение функции  $f(x_0)$  существует,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ .

Точка  $x_0$ , принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Схема 2



Число  $A$  называется пределом *справа* функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$   $\left( \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \right)$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < x - x_0 < \delta$  и входящих в область определения  $f(x)$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Аналогично определяется предел *слева* функции  $f(x)$  в точке  $x = x_0$   $\left( \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \right)$ .

В случае  $x_0 = 0$  будем записывать  $x \rightarrow +0$  и  $x \rightarrow -0$ .

Если существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$ , причем не все три числа  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$  равны между собой, то  $x_0$  называется *точкой разрыва I рода*.

*Точка устранимого разрыва*  $(f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0))$  это точка в которой левый и правый пределы функции в точке  $x_0$  равны между собой, но не равны значению функции в этой точке.

Точка скачка  $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$  это точка в которой левый и правый пределы функции в точке  $x_0$  различны.

Разность  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  называется скачком функции в точке  $x_0$ .

Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода. В этих точках не существует хотя один из односторонних пределов.

Пример 7.1

Найдите в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \\ -1, & x > 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x}{x-4} \quad \text{при } x \rightarrow 4.$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & 1 < x < 2,5, \\ 2x-7, & 2,5 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Решение

а) Область определения функции  $x \in (-\infty; +\infty)$

При  $x \rightarrow 1-0$   $f(x) = x$  и  $\lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1 - 0 = 1$ ,

при  $x \rightarrow 1+0$   $f(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1$ ,

при  $x \rightarrow 2-0$   $f(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow 2-0} 1 = 1$ ,

при  $x \rightarrow 2+0$   $f(x) = -1$  и  $\lim_{x \rightarrow 2+0} (-1) = -1$ .

б) Область определения функции  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = e^{+\infty} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

в) Область определения функции  $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = \frac{4-0}{4-0-4} = \frac{4}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = \frac{4+0}{4+0-4} = \frac{4}{+0} = +\infty.$$

$x = 4$  – точка разрыва II рода.

г) Область определения функции  $x \in [0; +\infty)$

исследуем точки  $x = 1$ ,  $x = 2,5$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2\sqrt{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (4 - 2x) = 2, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

В точке  $x = 1$  выполняются все условия непрерывности.

$$\lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2,5-0} (4 - 2x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2,5+0} (2x - 7) = -2.$$

$x = 2,5$  – точка разрыва I рода – точка скачка.

Скачок функции в этой точке равен

$$\lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) = -2 - (-1) = -1.$$

**Замечание 7.1** Иногда можно говорить о непрерывности функции  $f(x)$  только слева (или только справа):  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$  ( $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ ).

Например, функция  $f(x) = \sqrt{3 - x}$ , определенная при  $x \leq 3$ , в точке  $x = 3$  непрерывна только слева:  $f(3 - 0) = \sqrt{3 - (3 - 0)} = \sqrt{+0} = 0$  и  $f(3) = \sqrt{3 - 3} = 0$ ,  $f(3 - 0) = f(3)$ , а справа от этой точки функция вообще не определена. Окончательно,  $f(x)$  непрерывна на луче  $(-\infty; 3]$ .

## 7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x_0$  за исключением, быть может самой точки  $x_0$ , причем  $g'(x) \neq 0$ , и если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  при условии, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  существует.

Точка  $x_0$  может быть, как конечной, так и несобственной точкой  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Замечание 8.1** Неопределенности вида  $[0 \cdot \infty]$  или  $[\infty - \infty]$  приводятся к неопределенностям вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$  или  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  различными алгебраическими преобразованиями.

**Замечание 8.2** Если после применения правила Лопиталья снова получается неопределенность вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$  или  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  и для  $f'(x)$  и  $g'(x)$  выполнены условия, сформулированные для функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , правило применяется до тех пор, пока неопределенность не устранилась или не обнаружится, что нужные пределы не существуют.

**Замечание 8.3** Неопределенности вида  $[1^\infty]$ ,  $[\infty^0]$ ,  $[0^0]$  приводятся к неопределенности вида  $[0 \cdot \infty]$  с помощью предварительного логарифмирования или преобразования, использующего основное логарифмическое тождество

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

*Пример 8.1*

Применяя правило Лопиталья, найдите следующие пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$$

Решение

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 \cdot 1 + \frac{1}{1}}{e^1} = \frac{3}{e}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( x \cdot e^{\frac{x}{2}} \right)'}{\left( x + e^x \right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{2} \right)}{1 + e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( e^{\frac{x}{2}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{2} \right) \right)'}{\left( 1 + e^x \right)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \left( 2 + \frac{x}{2} \right)}{e^x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 2 + \frac{x}{2} \right)'}{\left( e^{\frac{x}{2}} \right)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left( \frac{1}{x^2} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{x \cdot (e^x - 1)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = [0^0] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \cdot \ln(\sin x)};$$

Найдем отдельно предел степени при  $x \rightarrow 0$ .



$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cos x) = 0.$$

Возвращаясь к исходному пределу, будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\sin x)} = e^0 = 1.$$

## 8. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Баллы, которыми оценивается каждая рейтинговая работа, могут быть различными на разных направлениях (баллы определяются, согласно рабочей программы по математике).

Вариант № 1

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + 3x - 2}; \quad \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = -2;$$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \operatorname{tg} 2x}{\sin^2 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x \leq -2, \\ x^2 - 1 & \text{при } -2 < x \leq 1, \\ -2x + 3 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Вариант № 2

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - x - 10}{7x - x^2 - 10}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = 2;$$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x \cdot \operatorname{tg} 2x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ 2^x & \text{при } 0 \leq x < 2, \\ 4 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант № 3

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21};$$

а)  $x_0 = -3;$

б)  $x_0 = 3;$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x + 9}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 5 - x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Вариант № 4

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 3};$$

а)  $x_0 = -1;$

б)  $x_0 = 1;$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}} \text{ (правило Лопиталья)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} \text{ (правило Лопиталья)}$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{при } x \leq -1, \\ 1 + 2x & \text{при } -1 < x < 2, \\ \frac{1}{x-2} & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант № 5

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = -3;$$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{1 - 4^x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} x - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right) \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 3-x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Вариант № 6

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}; \quad \text{а) } x_0 = 5; \quad \text{б) } x_0 = -5;$$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \cdot \sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right) \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ x+1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 7

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3};$$

а)  $x_0 = 1;$

б)  $x_0 = -3;$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ x-1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 8

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 3};$$

а)  $x_0 = 1;$

б)  $x_0 = 3;$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-9} - 1}{x-10} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \operatorname{tg} 3x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ 2x^2 - 14 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 9

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x + 2};$$

а)  $x_0 = -1$ ;      б)  $x_0 = 2$ ;

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \cdot \cos 7x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 4x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - 1) \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{при } -3 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 10

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 4x - 5};$$

а)  $x_0 = 5$ ;      б)  $x_0 = -5$ ;

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x - 8} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{2x - 1} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \frac{1}{x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{(x-2)^2} & \text{при } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Вариант № 11

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 6x - 7};$$

а)  $x_0 = -1;$

б)  $x_0 = 1;$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x(x-3)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2 - 3x + 2} \right) \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 2 \sin x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Вариант № 12

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x - 6};$$

а)  $x_0 = 2;$

б)  $x_0 = 6;$

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{x^2(x+8)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x & \text{при } 1 \leq x \leq e. \end{cases}$$

Вариант № 13

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}; \quad \text{а) } x_0 = 1; \quad \text{б) } x_0 = 2; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2 - \sqrt{x} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x \cdot \sin x}{\sin^2 6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{2}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 3x-1 & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вариант № 14

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}; \quad \text{а) } x_0 = 2; \quad \text{б) } x_0 = 3; \quad \text{в) } x_0 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\operatorname{tg}^2 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} \quad (\text{правило Лопиталья})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) \quad (\text{правило Лопиталья})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{при } -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{2}{x} & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Вариант № 15

Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12};$$

а)  $x_0 = 5$ ;

б)  $x_0 = 2$ ;

в)  $x_0 = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 15x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} \quad (\text{правило Лопиталя})$$

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции  $y = f(x)$  в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{x-1} & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

## Интегральное исчисление

методические указания к практическим занятиям

### Глава 1

#### Первообразная функции и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. На практике часто приходится решать обратную задачу: требуется восстановить функцию  $F(x)$ , зная ее производную  $f(x)$ . Функцию  $F(x)$  в этом случае называют первообразной для  $f(x)$ .

**Определение 1.** Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на заданном промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка  $F'(x) = f(x)$ .

**Пример 1.** Функция  $F(x) = \frac{x^5}{5}$  есть первообразная для функции  $f(x) = x^4$  на интервале  $(-\infty; \infty)$ , так как  $F'(x) = \left(\frac{x^5}{5}\right)' = \frac{1}{5}(x^5)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot x^4 = x^4 = f(x)$  для всех  $x \in (-\infty; \infty)$ .

**Пример 2.** Функция  $F(x) = \frac{1}{x}$  не является первообразной для функции  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$  на промежутке  $(-\infty; \infty)$ , так как равенство  $F'(x) = f(x)$  не выполнено в точке 0.



Однако в каждом из промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$  функция  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$ . Легко заметить, что в примере  $1 \frac{x^5}{5} + 8$  имеет ту же самую производную  $x^4$  и поэтому также является первообразной для  $x^4$  на  $R$ . Ясно, что вместо числа 8 можно подставить любую постоянную. Таким образом, видно, что задача нахождения первообразной имеет бесконечное множество решений.

**Определение 2.** Если функция  $F(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$ , то множество функций  $F(x)+C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  и обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

Где  $F(x)$  – первообразная;

$C$  - const.

$x$  – независимая переменная интегрирования;

$f(x)$  – подынтегральная функция;

$f(x)dx$  – подынтегральное выражение;

$\int$  – знак интеграла.

Операция нахождения первообразной функции называется ее интегрированием.

**Интегрирование** – операция, обратная дифференцированию.

**Пример 3.** Проверить, что  $\int 5x^4 dx = x^5 + c$ .

Дифференцируя результат интегрирования  $(x^5 + c)' = 5x^4$ , получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено, верно.

## Глава 2

### Таблица основных интегралов

Рассмотрим первоначально основные свойства неопределенного интеграла.

1°. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

2°. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left( \int f(x)dx \right) = f(x)dx$$

3°. Неопределенный интеграл дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

где  $C$  – произвольное число.

4°. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,$$

где  $k$  – некоторое число.

5°. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

В интегральном исчислении нет общего приема нахождения неопределенного интеграла. Существует несколько методов, которые дают возможность свести заданный интеграл к так называемому табличному. Приведенную таблицу основных интегралов необходимо выучить наизусть.

1. $\int 0dx = c$	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
-------------------	--

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$	11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, (0 < a \neq 1)$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} x + c$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + c$	14. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-1}{x+1} \right  + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$	15. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + c$
7. $\int \cos x dx = \sin x + c$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + c$
8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x  + c$	17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + c$
9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x  + c$	18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c$

Обратите внимание на тесную связь этой таблицы с таблицей производных. (Это поможет вам быстрее и легче выучить таблицу).

А также следует запомнить нижеприведенную теорему.

**Теорема.** Пусть  $F(x)$  некоторая первообразная для функции  $f(x)$ ,

$$\text{тогда } \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + c,$$

где  $k$  и  $b$  – некоторые числа,  $k \neq 0$ .

Как использовать таблицу и теорему рассмотрим в третьей главе.

### Глава 3

#### Основные методы интегрирования

При интегрировании нет какого – либо общего приема вычисления неопределенных интегралов. Имеется лишь ряд методов, позволяющих свести данный интеграл к табличному. Поэтому для каждого данного интеграла нужно суметь найти подходящий метод, с помощью которого преобразовать данный интеграл к табличному виду, а затем найти его по соответствующей формуле таблицы интегралов. Рассмотрим простейшие методы нахождения неопределенных интегралов.

#### 3.1. Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется непосредственным интегрированием. При решении таких интегралов используют различные тождественные преобразования подынтегральной функции.

**Пример 4.** Вычислить интеграл.

$$\int \left( 7 \sin x + 4 - x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx$$

Применив свойства  $4^\circ$  и  $5^\circ$ , имеем

$$\int \left( 7 \sin x + 4 - 4x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx = 7 \int \sin x dx + 4 \int dx - 4 \int x^5 dx + \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Далее используем основную таблицу интегралов, находим:

$$7 \int \sin x dx = 7(-\cos x + c_1) = -7 \cos x + 7c_1$$

$$4 \int dx = 4(x + c_2) = 4x + 4c_2$$

$$-4 \int x^5 dx = -4 \cdot \left( \frac{x^{5+1}}{5+1} + c_3 \right) = -4 \cdot \left( \frac{x^6}{6} + c_3 \right) = -\frac{2x^6}{3} + 4c_3$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c_4$$

$$-2 \int \frac{dx}{x^2 - 1} = -2 \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) + c_5 = -\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - 2c_5$$

Таким

образом,

$$\int \left( 7 \sin x + 4 - 4x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx = -7 \cos x + 4x - \frac{2}{3} x^6 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + (7c_1 + 4c_2 + 4c_3 + c_4 - 2c_5)$$

Обычно произвольные постоянные заменяют одной постоянной:

$$C = 7c_1 + 4c_2 + 4c_3 + c_4 - 2c_5$$

В результате получается, что исходный интеграл равен: 7

$$\cos x + 4x - \frac{2}{3} x^6 + \ln|x| - \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

Чтобы сделать проверку полученного ответа, нужно его продифференцировать.

$$\left( -7 \cos x + 4x - \frac{2}{3} x^6 + \ln|x| - \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c \right)' = -7 \cdot (-\sin x) + 4 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 6x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 1} + 0 = 7 \sin x + 4 - 4x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 1} \cdot \left( \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)' = (\ln(x-1) - \ln(x+1))' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

**Пример 5.** Вычислить интеграл  $\int \frac{4}{x^2 + 9} dx$ .

Интеграл табличный, преобразуем его и решим.

$$\int \frac{4}{x^2 + 9} dx = 4 \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c$$

Применили формулу  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ , где  $a = 3$ .

**Пример 6.** Вычислить интеграл  $\int e^x \cdot \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$ .

Интеграл не табличный, поэтому применим тождественное преобразование – раскроем скобки.

$$\int e^x \cdot \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left( e^x + \frac{e^x \cdot e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left( e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \int e^x dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = e^x + \operatorname{tg} x + c.$$

**Пример 6.** Вычислить интеграл  $\int \frac{x^5 + 3x^3 - 2}{x} dx$ .

Интеграл опять же не табличный, поэтому преобразуем его. Разделим каждое слагаемое числителя на знаменатель.

$$\frac{x^5 + 3x^3 - 2}{x} = \frac{x^5}{x} + \frac{3x^3}{x} - \frac{2}{x} = x^4 + 3x^2 - \frac{2}{x}$$

Интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 3x^3 - 2}{x} dx &= \int \left( x^4 + 3x^2 - \frac{2}{x} \right) dx = \int x^4 dx + 3 \int x^2 dx - 2 \int \frac{dx}{x} = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - 2 \ln|x| + c = \\ &= \frac{x^5}{5} + x^3 - 2 \ln|x| + c. \end{aligned}$$

**Пример 7.** Вычислить  $\int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx$ .

Преобразуем подынтегральное выражение, возведя скобки в квадрат.

$$\left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 = \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}, \quad \text{откуда} \quad \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 \quad (\text{основное}$$

тригонометрическое тождество).

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = \sin x \quad (\text{синус двойного угла}).$$

$$\text{Получаем: } \int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = \int 1 dx + \int \sin x dx = x - \cos x + c.$$

### 3.2. Метод подстановки (или замены переменной)

Один из основных методов интегрирования, который описывается следующей формулой :

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Метод заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

**Пример 8.** Вычислить интеграл  $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$ .

Пусть  $x^2 + 1 = t$ , тогда найдя производную обеих частей замены, получаем

$$2x dx = dt, \quad x dx = \frac{dt}{2}.$$

$$\text{Поэтому } \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c.$$

**Пример 9.** Вычислить интеграл  $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx$ .

Обозначим  $1 + 3 \cos x = t$ . Тогда  $-3 \sin x dx = dt$ ,  $\sin x dx = -\frac{dt}{3}$ .

Имеем: 
$$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln|t| + c = -\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + c.$$

**Пример 10.** Вычислить интеграл  $\int \frac{\operatorname{arctg}^{100} x}{1+x^2} dx.$

Пусть  $\operatorname{arctg} x = t.$  Тогда  $\frac{dx}{1+x^2} = dt.$

Следовательно, 
$$\int \frac{\operatorname{arctg}^{100} x}{1+x^2} dx = \int t^{100} dt = \frac{t^{101}}{101} + c = \frac{\operatorname{arctg}^{101} x}{101} + c.$$

**Пример 11.** Вычислить интеграл  $\int \cos(3x+4) dx.$

Интеграл можно решить, используя теорему (Глава 2). Применим формулу

$$\int f(kx+b) dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+b) + c$$

$$\int \cos(3x+4) dx = \frac{1}{3} \sin(3x+4) + c, \text{ где } k=3, b=4.$$

**Пример 12.** Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{2x+5}.$

Искомый интеграл однотипен и решается как вышеуказанный интеграл.

$$\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2} \ln|2x+5| + c, \text{ где } k=2, b=5.$$

### 3.3. Интегрирование по частям

Применение этого метода основывается на формуле:

$$\int u(x) dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) du(x) \text{ или } \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

При ее применении фиксируется разбиение подынтегрального выражения искомого интеграла на два сомножителя ( $u$  и  $dv$ ). При переходе к правой части первый из них дифференцируется ( $du = u' dx$ ), а второй интегрируется ( $v = \int dv + c$ ).

Часто возникает вопрос: как представить подходящим образом подынтегральное выражение  $f(x) dx$  исходного интеграла в виде  $u(x) dv(x)$ . Общего правила для этого нет. Однако можно пользоваться следующими частными указаниями:

$u(x)$	$dv(x)$
$\ln kx$	$e^{kx}$
$\arcsin kx$	$\sin kx$
$\arccos kx$	$\cos kx$
$\operatorname{arctg} kx$	
$\operatorname{arctg} kx$	

**Пример 13.** Вычислить интеграл  $\int x \cdot \ln x dx.$

Пусть 
$$\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = (\ln x)' dx && du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx &\Rightarrow v = \int x dx && v = \frac{x^2}{2} + c \end{aligned}$$

По формуле интегрирования по частям получим:

$$\int x \ln x dx = \left( \frac{x^2}{2} + c \right) \cdot \ln x - \int \left( \frac{x^2}{2} + c \right) \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Решим отдельно полученный интеграл.

$$\int \left( \frac{x^2}{2} + c \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \left( \frac{x}{2} + \frac{c}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx + c \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{4} + c \cdot \ln x + c_1. \text{ В итоге имеем:}$$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + c \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} - c \cdot \ln x + c_1 = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c_1.$$

**Замечание:** Анализ полученного решения показывает, что постоянная  $C$ , возникшая при нахождении  $v$  не входит в запись окончательного ответа. Поэтому в дальнейшем, применяя формулу интегрирования по частям и найдя  $v$  будем полагать  $C = 0$ , что несколько упрощает запись решения.

В некоторых случаях для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять более одного раза.

**Пример 14.** Вычислить интеграл  $\int (x^2 + 5x - 4) \cdot \cos x dx$ .

$$\text{Пусть } \begin{matrix} u = x^2 + 5x - 4 \\ dv = \cos x \end{matrix}, \text{ то } \begin{matrix} du = (x^2 + 5x - 4)' dx \\ v = \int \cos x dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = (2x + 5) dx \\ v = \sin x \end{matrix}$$

Напоминаем, чтобы выбрать  $u$  и  $dv$ , используйте частные указания, записанные выше.

$$\int (x^2 + 5x - 4) \cdot \cos x dx = (x^2 + 5x - 4) \cdot \sin x - \int (2x + 5) \cdot \sin x dx$$

Возникший интеграл не является табличным, применим повторно формулу интегрирования по частям.

$$\int (2x + 5) \cdot \sin x dx = \left[ \begin{matrix} u = 2x + 5, du = 2 dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{matrix} \right] = -(2x + 5) \cdot \cos x + 2 \int \cos x dx =$$

$$= -(2x + 5) \cdot \cos x + 2 \sin x + c.$$

Окончательно имеем:

$$\int (x^2 + 5x - 4) \cdot \cos x dx = (x^2 + 5x - 4) \cdot \sin x + (2x + 5) \cdot \cos x - 2 \sin x + c.$$

На практике метод интегрирования по частям часто комбинируется с другими методами интегрирования.

**Пример 15.** Найти  $\int \ln^2(2x + 3) dx$ .

Выполним сначала замену переменной: положим  $t = 2x + 3$ .

Тогда  $dt = (2x + 3)' dx \Rightarrow dt = 2 dx$  и  $dx = \frac{dt}{2}$ , следовательно

$$\int \ln^2(2x + 3) dx = \frac{1}{2} \cdot \int \ln^2 t dt$$

$$\text{Пусть } \begin{matrix} u = \ln^2 t \\ dv = dt \end{matrix}, \text{ тогда } \begin{matrix} du = (\ln^2 t)' dt \\ v = \int dt \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = \frac{2 \ln t}{t} dt \\ v = t \end{matrix}$$

$$\int \ln^2(2x + 3) dx = \frac{1}{2} \left( t \cdot \ln^2 t - \int \frac{2 \ln t \cdot t}{t} dt \right) = \frac{t \ln^2 t}{2} - \int \ln t dt$$

Полагая в формуле интегрирования по частям  $u = \ln t, dv = dt$ , получаем

$$\int \ln t dt = t \cdot \ln t - t + c$$

Окончательно имеем:

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{t \ln^2 t}{2} - t \ln t + t + c = \frac{(2x+3) \cdot \ln^2(2x+3)}{2} - (2x+3) \cdot \ln(2x+3) + 2x + c.$$

### 3.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – многочлены.

Рациональная дробь может быть правильной и неправильной.

Правильная дробь – это дробь, у которой степень многочлена  $P(x)$  ниже степени многочлена  $Q(x)$ .

Неправильная дробь – это дробь, у которой степень многочлена  $P(x)$  больше (или равна) степени многочлена  $Q(x)$ .

#### 3.4.1. Интегрирование правильных дробей

Рассмотрим несколько видов правильных дробей.

**1 вид:**

$$\int \frac{A}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + c, \text{ где } A, a - \text{ действительные числа.}$$

**2 вид:**

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c, \text{ где } m - \text{ целое число, больше единицы.}$$

**3 вид:**

$$\int \frac{dx}{x^2 + p \cdot x + q}$$

Для решения этого вида интеграла требуется в знаменателе выделить полный квадрат. А

именно:  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$

**Пример 16.** Вычислить  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$ .

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 4 + 8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 2^2} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.$$

Использовали формулу  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ .

**Пример 17.** Вычислить  $\int \frac{5dx}{x^2 + 12x - 2}$ .

$$\begin{aligned} 5 \int \frac{dx}{x^2 + 12x - 2} &= 5 \int \frac{dx}{(x+6)^2 - 36 - 2} = 5 \int \frac{dx}{(x+6)^2 - 38} = 5 \int \frac{dx}{(x+6)^2 - (\sqrt{38})^2} = 5 \int \frac{d(x+6)}{(x+6)^2 - (\sqrt{38})^2} = \\ &= \frac{5}{2\sqrt{38}} \ln \left| \frac{x+6 - \sqrt{38}}{x+6 + \sqrt{38}} \right| + c. \end{aligned}$$

Использовали формулу:  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$ .

**Пример 18.** Вычислить  $\int \frac{2dx}{3x^2 - 9x + 15}$ .

$$\begin{aligned}
2 \int \frac{dx}{3(x^2 - 3x + 5)} &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 5} = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5} = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + c = \frac{4}{3\sqrt{11}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x - 3}{\sqrt{11}} + c.
\end{aligned}$$

**4 вид:**

$$\int \frac{Ax + b}{x^2 + pq + q} dx$$

При решении таких интегралов можно использовать несколько подходов. Например, сначала выделить полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, а затем использовать соответствующую замену переменной.

**Пример 19.** Вычислить  $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx$ .

Поскольку  $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ , то используем замену переменной  $t = x+1$ . Тогда  $dt = dx$ ,  $x = t-1$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx &= \int \frac{2 \cdot (t-1) + 1}{t^2} dt = \int \frac{2t-1}{t^2} dt = \int \left( \frac{2t}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2 \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t^2} = 2 \ln|t| + \frac{1}{t} + c = \\
&= 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.
\end{aligned}$$

**Пример 20.** Вычислить  $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx$ .

Так как  $x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$ , то  $t = x-2$ . Тогда  $dt = dx$ ,  $x = t+2$

$$\int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{8-(t+2)}{t^2+9} dt = \int \frac{6-t}{t^2+9} dt = \int \frac{6}{t^2+9} dt = - \int \frac{t}{t^2+9} dt$$

Первый интеграл – табличный

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

Второй интеграл можно вычислить по формуле

$$\int \frac{xdx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+b| + c$$

Тогда получаем

$$\int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{3} - \frac{1}{2} \ln|t^2+9| + c = 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} - \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+13| + c.$$

Можно решить эти же интегралы, используя введение переменной под знак дифференциала.

$$\text{Например: } \int \frac{8-x}{x^2-4x+13} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13} + 6 \int \frac{dx}{x^2-4x+13} \text{ т.е.}$$

$$-\frac{1}{2} d(x^2-4x+13) = -\frac{1}{2} (2x-4) dx$$

$$-\frac{1}{2} d(x^2-4x+13) = (2-x) dx$$

Решим каждый интеграл отдельно.



$$\int \frac{d(x^2 - 4x + 13)}{x^2 - 4x + 13} = \ln|x^2 - 4x + 13| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + c$$

Имеем окончательный ответ:

$$\int \frac{8-x}{x^2 - 4x + 13} = -\frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 13| + 2 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + c.$$

Рассмотренные приемы интегрирования правильных дробей имеют существенный недостаток: он не обобщается в том случае, когда степень знаменателя больше двух.

**5 вид:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} \dots$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$  - некоторые числа, подлежащие определению. То есть, чтобы решить эти интегралы, нужно разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей. Этот метод называется методом неопределенных коэффициентов.

**Пример 21.** Найти  $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx$

Так как  $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x^2 + 2x - 8) = x(x+4)(x-2)$ , то

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+4} + \frac{A_3}{x-2}$$

Приведем к общему знаменателю правую часть равенства и затем его отбросим.

$$x^2 - 2x + 2 = A_1(x+4)(x-2) + A_2x(x-2) + A_3x(x+4)$$

$$x^2 - 2x + 2 = A_1x^2 + 2A_1x - 8A_1 + A_2x^2 - 2A_2x + A_3x^2 + 4A_3x$$

$$x^2 - 2x + 2 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (2A_1 - 2A_2 + 4A_3)x + (-8A_1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 : \{ A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ x^1 : \{ 2A_1 - 2A_2 + 4A_3 = -2 \\ x^0 : \{ -8A_1 = 2 \end{cases}$$

Откуда  $A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{13}{12}, A_3 = \frac{1}{6}$ , тогда

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{13}{12} \int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{13}{12} \ln|x+4| + \frac{1}{6} \ln|x-2| + c.$$

### 3.4.2. Интегрирование неправильных дробей

Если рациональная дробь  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  неправильная, то следует предварительно выделить целую часть, т.е. поделить числитель на знаменатель. Алгоритм деления многочленов «углом»,

известен из школьного курса. В итоге исходная дробь будет представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби. Например,  $\frac{x^3 - 3x + 4}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{6}{x - 2}$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 4 \Big| x^2 + 2x + 1 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 4} \\ 2x^2 - 3x \phantom{+ 4} \\ \underline{2x^2 - 4x} \phantom{+ 4} \\ x + 4 \\ \underline{x - 2} \\ 6 \end{array}$$

**Пример 22.** Вычислить  $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx$ .

Выполним деление под «углом», имеем

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 \Big| x^2 - 6x + 5 \\ \underline{x^3 - 6x^2 + 5x} \\ 7x^2 - 5x \\ \underline{7x^2 - 42x + 35} \\ 37x - 35 \end{array}$$

Или  $\frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} = x + 7 + \frac{37x - 35}{x^2 - 6x + 5}$ . Тогда:

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = \int x dx + 7 \int dx + \int \frac{37x - 35}{x^2 - 6x + 5} dx = \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{37x - 35}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

Решим последний интеграл методом неопределенных коэффициентов.

$$\int \frac{37x - 35}{x^2 - 6x + 5} dx = \int \frac{37x - 35}{(x - 1)(x - 5)} dx.$$

$$\frac{37x - 35}{(x - 1)(x - 5)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 5}$$

$$37x - 35 = A_1x - 5A_1 + A_2x - A_2$$

$$x^1 : \begin{cases} A_1 + A_2 = 37 \end{cases}$$

$$x^0 : \begin{cases} -5A_1 - A_2 = -35 \end{cases}$$

$$\text{Откуда } A_1 = -\frac{1}{2} \quad A_2 = \frac{75}{2}$$

$$\text{Откуда } \int \frac{37x - 35}{x^2 - 6x + 5} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{75}{2} \int \frac{dx}{x - 5} = -\frac{1}{2} \ln|x - 1| + \frac{75}{2} \ln|x - 5| + c.$$

Окончательный ответ следующий:

$$\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx = \frac{x^2}{2} + 7x - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{75}{2} \ln|x-5| + c.$$

### 3.4.3. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ , где $R$ – рациональная функция

С помощью подстановки  $e^x = t$ , откуда  $e^x dx = dt$ ,  $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$ , интеграл указанного вида преобразуется в интеграл от рациональной функции. Подынтегральное выражение может быть правильной или неправильной дробью, поэтому метод решения зависит от этого.

**Пример 23.** Вычислить  $\int \frac{e^{5x}}{e^x + 1} dx$ .

Используем вышеуказанную замену.

$$e^x = t, dx = \frac{dt}{t}$$

Имеем  $\int \frac{t^5}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} dx = \int \frac{t^4}{t+1} dt$ , получим неправильную дробь.

Выделим целую часть, путем деления числителя на знаменатель.

$$\begin{array}{r} t^4 \overline{) t^3 - t^2 + t - 1} \\ \underline{t^4 + t^3} \phantom{- 1} \\ -t^3 \phantom{+ t - 1} \\ \underline{-t^3 - t^2} \phantom{- 1} \\ t^2 \phantom{+ t - 1} \\ \underline{t^2 + t} \phantom{- 1} \\ -t \phantom{- 1} \\ \underline{-t - 1} \\ 1 \end{array}$$

$$\int \frac{t^4}{t+1} dt = \int t^3 dt - \int t^2 dt + \int t dt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + c.$$

Возвращаясь к замене, получаем:

$$\int \frac{e^{5x}}{e^x + 1} dx = \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln|e^x + 1| + c.$$

### 3.5. Интегрирование некоторых простейших иррациональных функций

Основной способ решения этих интегралов в замене переменной, что позволяет интегралы от иррациональных функций свести к интегралам от рациональных функций.

Рассмотрим несколько видов интегралов.

**1 вид:**

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[n]{x}) dx$ . Такие интегралы рационализируются заменой переменной  $t = \sqrt[n]{x}$ .

**Пример 24.** Вычислить  $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

$n_1 = 2$              $n_1$  – степень первого радикала  
 $n_2 = 3$ , где       $n_2$  – степень второго радикала  
 $s = 6$                $s$  – наименьшее общее кратное чисел  $n_1$  и  $n_2$ .

Применим подстановку  $x = t^6$ ,  $dx = 6t^5 dt$ . Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6t^5 dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}} + (t^6)^{\frac{1}{3}}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1}$$

В полученном интеграле подынтегральное выражение есть неправильная дробь. Выделим целую часть и в результате получаем.

$$6 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + c.$$

Вернемся к замене  $t = \sqrt[3]{x}$ .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2(\sqrt[6]{x})^3 - 3(\sqrt[6]{x})^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + c.$$

**2 вид:**

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ .

В простейших случаях такие интегралы сводятся к табличным. Необходимая замена переменной усматривается после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене  $ax^2 + bx + c$ .

**Пример 25.** Вычислить  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ .

Если  $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ , то, введя замену  $x+1 = t$ ,  $dx = dt$ , получаем

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = \ln|t + \sqrt{t^2 + 4}| + c = \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + c.$$

**Пример 26.** Вычислить  $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$ .

$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$ , положим  $x+1 = t$

Тогда  $x = t-1$ ,  $dx = dt$ , и, следовательно,

$$\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{3 \cdot (t-1) + 2}{\sqrt{t^2 + 4}} dt = \int \frac{3t-1}{\sqrt{t^2 + 4}} dt = 3 \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} dt - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4}} = 3\sqrt{t^2 + 4} - \ln|t + \sqrt{t^2 + 4}| + c = [t = x+1] = 3\sqrt{(x+1)^2 + 4} - \ln|x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4}| + c = 3\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + c$$

В более сложных случаях для нахождения интегралов вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  используются подстановки Эйлера.

### 3.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удается рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим наиболее типичные ситуации.

### 3.6.1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , где $R$ – рациональная функция.

Вычисление неопределенных интегралов этого типа сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , которая называется универсальной. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} \right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату. На практике применяются и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции.

А именно  $\cos x = t$ ,  $\sin x = t$  или  $\operatorname{tg} x = t$

**Пример 27.** Вычислить  $\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}$ .

Применим универсальную подстановку.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 5 \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) + 3 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{10t+6}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{10t+6} = \\ &= \frac{2}{10} \ln |10t+6| + c = \frac{1}{5} \ln |10t+6| + c. \end{aligned}$$

Вернемся к замене и получаем результат:

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x} = \frac{1}{5} \ln \left| 10 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 \right| + c.$$

**Пример 28.** Вычислить  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 4}$ .

Используем более простую замену  $\cos x = t$ ,  $-\sin x dx = dt$ ,  $\sin x dx = -dt$ .

Имеем,

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 4} = - \int \frac{dt}{t^2 + 4} = - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c = - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos x}{2} \right) + c.$$

### 3.6.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:  
Подстановка  $\sin x = t$ , если  $n$  – целое положительное нечетное число.

Подстановка  $\cos x = t$ , если  $m$  – целое положительное нечетное число.

Если  $m$  и  $n$  – целые неотрицательные одновременно четные числа, то используют формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Подстановка  $\operatorname{tg} x = t$ , если  $m + n$  – есть четное отрицательное целое число.

**Пример 29.** Вычислить  $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$ .

Полагая,  $\sin x = t, \cos x dx = dt$ , получим.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx &= \\ \int \sin^4 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x dx &= \int t^4 \cdot (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} \cdot t^7 + \\ &+ \frac{1}{9} \cdot t^9 + c = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c. \end{aligned}$$

**Пример 30.** Вычислить  $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$ .

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx &= \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cdot \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c. \end{aligned}$$

### 3.6.3. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x dx$

При нахождении таких интегралов применяется формула:  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$  или  $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ , с помощью которой последовательно понижается степень  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ .

**Пример 31.** Найти  $\int \operatorname{tg}^5 x dx$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x d(\operatorname{tg} x) - \\ &- \int \operatorname{tg} x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + c \end{aligned}$$

### 3.6.4. Интеграл вида $\int \sin mx \cdot \cos n x dx, \int \cos mx \cdot \cos n x dx, \int \sin mx \cdot \sin n x dx$ .

Для решения этих интегралов используют тригонометрические формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

**Пример 32.** Вычислить  $\int \sin 3x \sin x dx$ .

$$\int \sin 3x \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + c.$$

## Глава 4

### «Неберущиеся» интегралы

Как известно всякая непрерывная функция имеет первообразную. Но бывают случаи, когда первообразная некоторой элементарной функции  $f(x)$  не является также элементарной функцией.

По этой причине соответствующие неопределенные интегралы называются «неберущимися» в элементарных функциях, а сами функции – неинтегрируемыми в конечном виде. Например,  $\int \sin x^2 dx$ ,  $\int \cos x^2 dx$ ,  $\int \frac{dx}{\ln x}$ ,  $\int \frac{\cos x}{x} dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \frac{e^x}{x} dx$ ,  $\int e^{-x^2} dx$  – «неберущиеся» т.е. не существует такой элементарной функции  $f(x)$ , что  $f'(x) = e^{-x^2}$ ,  $f'(x) = \sin x^2$  и т.д.

Указанные «неберущиеся» интегралы, по крайней мере, не могут быть найдены с помощью вышеуказанных методов вычисления. Однако это не означает, что указанные интегралы не существуют или их невозможно найти.

## Глава 5

### Список заданий для самостоятельной работы

$$5.1 \int e^{3x} \cdot 3^x dx$$

$$5.31 \int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$5.2 \int \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$$

$$5.32 \int \frac{x^2 + 2x + 7}{(x-2)(x^2 + 1)} dx$$

$$5.3 \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} dx$$

$$5.33 \int \frac{x^3 + 5}{x(x^2 + x + 1)} dx$$

$$5.4 \int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx$$

$$5.34 \int \frac{x^2 + x + 1}{x(x^3 + 8)} dx$$

$$5.5 \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$$

$$5.35 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$$

$$5.6 \int \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) dx$$

$$5.7 \int 4x \left( 3 + \frac{4}{\sqrt{x^3}} \right) dx$$

$$5.8 \int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$$

$$5.9 \int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2} dx$$

$$5.10 \int (x+4) \sin x dx$$

$$5.11 \int \arcsin x dx$$

$$5.12 \int (x^2 + 7x + 5) \cos 2x dx$$

$$5.13 \int (2x+1)^2 e^{-x} dx$$

$$5.14 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$5.15 \int \frac{\cos 3x}{3 + \sin 3x} dx$$

$$5.16 \int \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx$$

$$5.17 \int (3+4x)^{10} dx$$

$$5.18 \int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3 - 8} dx$$

$$5.19 \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$5.20 \int \frac{dx}{9x^2 - 1}$$

$$5.21 \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$$

$$5.36 \int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}} dx$$

$$5.37 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$$

$$5.38 \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$5.39 \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x+4})}$$

$$5.40 \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$$

$$5.41 \int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$$

$$5.42 \int \frac{dx}{1-\sin x}$$

$$5.43 \int \sin^3 x dx$$

$$5.44 \int \operatorname{tg}^5 2x dx$$

$$5.45 \int \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

$$5.46 \int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$$

$$5.47 \int \frac{e^{3x} + 2e^x}{e^{2x} + e^x + 1} dx$$

$$5.48 \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x + 2}$$

$$5.49 \int \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$5.50 \int \operatorname{ctg}^3 5x dx$$



$$5.22 \int \frac{5dx}{x^2 - 2x + 4}$$

$$5.23 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$5.24 \int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 7}$$

$$5.25 \int \frac{x + 2}{x^2 - x + 3} dx$$

$$5.26 \int \frac{x + 2}{2x + 3} dx$$

$$5.27 \int \frac{xdx}{3x^2 + x + 1}$$

$$5.28 \int \frac{dx}{x^4 + x^2}$$

$$5.29 \int \frac{dx}{1 - x^3}$$

$$5.30 \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$$

$$5.51 \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

$$5.52 \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$5.53 \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$5.54 \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$$

$$5.55 \int \sin^3 x \cos^2 x dx$$

$$5.56 \int x^2 \operatorname{arctg}(2x + 1) dx$$

$$5.57 \int \frac{e^{5x}}{e^x + 1} dx$$

$$5.58 \int \frac{x^3}{x - 2} dx$$

$$5.59 \int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos x dx$$

$$5.60 \int \frac{x^4}{\sqrt{4 - x^{10}}} dx$$

## Глава 6 Типовые расчетные задания

Вариант 1

$$1. \int \frac{8 - 13x}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$2. \int \frac{\sin 2x}{1 + 3 \cos 2x} dx$$

$$3. \int (4 - 3x)e^{-3x} dx$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + x^2} dx$$

$$5. \int \frac{2x + 22}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{8 \sin^2 x - 16 \sin x \cos x}$$

$$8. \int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$$

Вариант 2

$$1. \int \frac{9 - 2x}{4 + x^2} dx$$

$$2. \int \frac{3x^3}{1 - x^4} dx$$

$$3. \int \operatorname{arctg} 2x dx$$

$$4. \int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$5. \int \frac{5x^2 + 17x + 36}{(x + 1)(x^2 + 6x + 13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 2 \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x}$$

$$8. \int \sqrt[5]{\sin^4 x \cos^3 3x} dx$$

$$9. \int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{(1 + \sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[4]{x^3}} dx$$

Вариант 3

$$1. \int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{\sin 3x}{3 - \cos 3x} dx$$

$$3. \int (3x+4)e^{3x} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x^3 - x^2}$$

$$5. \int \frac{6x}{x^3 - 1} dx$$

$$6. \int \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$$

$$8. \int \cos^3 x \sin^8 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt{x}} dx$$

Вариант 5

$$1. \int \frac{3x+2}{2x^2+1} dx$$

$$2. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 4} dx$$

$$3. \int (5x-2)e^{3x} dx$$

$$4. \int \frac{3x^2 - 7x + 2}{(x^2 - x)(x - 1)} dx$$

$$5. \int \frac{4x^2 + 7x + 5}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{10 \sin x + 5 \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}$$

$$9. \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} dx$$

Вариант 4

$$1. \int \frac{4-2x}{\sqrt{4x^2+1}} dx$$

$$2. \int \frac{e^x}{2e^x+3} dx$$

$$3. \int (4x-2) \cos 2x dx$$

$$4. \int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2} dx$$

$$5. \int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5+3 \cos x - 5 \sin x}$$

$$7. \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$$

$$8. \int \cos^4 x \sin^3 x dx$$

$$9. \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^4}} dx$$

Вариант 6

$$1. \int \frac{x+5}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{e^x}{4-3e^x} dx$$

$$3. \int (4-16x) \sin 4x dx$$

$$4. \int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$$

$$5. \int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{3+2 \cos x - \sin x}$$

$$7. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 5 \cos^2 x}$$

$$8. \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$$

$$9. \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^8}} dx$$

$$8. \int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[9]{x^5}} dx$$

Вариант 7

$$1. \int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}} dx$$

$$2. \int \frac{x^2}{7-5x^3} dx$$

$$3. \int (1-6x)e^{2x} dx$$

$$4. \int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx$$

$$5. \int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5-3\cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$$

$$8. \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}} dx$$

Вариант 9

$$1. \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}} dx$$

$$3. \int \operatorname{arctg} 8x dx$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} dx$$

$$5. \int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$$

$$6. \int \frac{dx}{3+5\cos x}$$

Вариант 8

$$1. \int \frac{7x-2}{2x^2+9} dx$$

$$2. \int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x + 4} dx$$

$$3. \int \operatorname{arcsin} 3x dx$$

$$4. \int \frac{x^3 - 4x + 5}{(x-1)(x^2-1)} dx$$

$$5. \int \frac{2x^2 + 4x + 20}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 7\cos^2 x}$$

$$8. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt{x})^2}}{x \cdot \sqrt[6]{x^5}} dx$$

Вариант 10

$$1. \int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-5}} dx$$

$$2. \int \frac{4x^3}{7+2x^4} dx$$

$$3. \int (2-4x)\sin 2x dx$$

$$4. \int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$5. \int \frac{4x^2 + 38}{(x+2)(x^3 - 2x + 10)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}$$

$$7. \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

$$8. \int \frac{3 \sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$$

$$8. \int \sin^5 x \cos^4 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx$$

#### Вариант 11

$$1. \int \frac{x-3}{9x^2+7} dx$$

$$2. \int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17} dx$$

$$3. \int \arctg 7x dx$$

$$4. \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$5. \int \frac{19x - x^2 - 34}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$$

$$7. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$$

$$8. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x+3}}{1 + \sqrt[3]{x+3}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x \cdot \sqrt[8]{x^7}} dx$$

#### Вариант 12

$$1. \int \frac{3x-1}{\sqrt{16-3x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{7x^3}{2x^4-5} dx$$

$$3. \int (4x-3)e^{-2x} dx$$

$$4. \int \frac{dx}{x^3+x^2}$$

$$5. \int \frac{x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{8+4 \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x}$$

$$8. \int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x \cdot \sqrt[12]{x^7}} dx$$

#### Вариант 13

$$1. \int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x-2}} dx$$

$$3. \int (2-9x)e^{-3x} dx$$

$$4. \int \frac{4x dx}{(x^2-1)(x+1)}$$

$$5. \int \frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$$

#### Вариант 14

$$1. \int \frac{8x+2}{4x^2+3} dx$$

$$2. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx$$

$$3. \int \ln(x-7) dx$$

$$4. \int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)} dx$$

$$5. \int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$$

6.  $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$
7.  $\int \frac{\sin 2x}{4 \sin^4 x + \cos^4 x} dx$
8.  $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cdot \cos^3 x dx$
9.  $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x+3}} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \cdot \sqrt[6]{x}} dx$

Вариант 15

1.  $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
2.  $\int \frac{\sin x}{1+3 \cos x} dx$
3.  $\int \arccos 2x dx$
4.  $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx$
5.  $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx$
6.  $\int \frac{dx}{2+4 \sin x+3 \cos x}$
7.  $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x+4 \cos^2 x}$
8.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}} dx$
9.  $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx$

Вариант 17

1.  $\int \frac{5-x}{2+x^2} dx$
2.  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5} dx$
3.  $\int (5x+6) \cos 2x dx$
4.  $\int \frac{x^3-3}{(x^2-1)(x-1)} dx$

6.  $\int \frac{dx}{7 \sin x - 3 \cos x}$
7.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$
8.  $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx$
9.  $\int \frac{x+1 + \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(1 + \sqrt[3]{x+1})} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \cdot \sqrt[8]{x}} dx$

Вариант 16

1.  $\int \frac{7-4x}{\sqrt{1+9x^2}} dx$
2.  $\int \frac{\sin 2x}{4 - \sin^2 x} dx$
3.  $\int \arccos 7x dx$
4.  $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx$
5.  $\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx$
6.  $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x}$
7.  $\int \frac{dx}{3 \cos^2 x - 2}$
8.  $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$
9.  $\int \frac{\sqrt{3x+1} + 2}{2\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt{3x+1}} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}} dx$

Вариант 18

1.  $\int \frac{3+5x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$
2.  $\int \frac{x^2}{7+3x^3} dx$
3.  $\int (3x-2) \cos 5x dx$
4.  $\int \frac{2x^2+1}{x^2(x+1)} dx$

$$5. \int \frac{x^2 - 13x + 40}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx$$

$$6. \int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x + 3 \cos^2 x}$$

$$8. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$$

$$10. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \cdot \sqrt[10]{x^9}} dx$$

$$5. \int \frac{4x - x^2 - 12}{x^3 + 8} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}$$

$$8. \int \sin^3 x \cdot \sqrt[5]{\cos^4 x} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x \cdot \sqrt[5]{x^3}} dx$$

#### Вариант 19

$$1. \int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}} dx$$

$$2. \int \frac{3x+3}{x^2+2x} dx$$

$$3. \int (2x-3) \cos 2x dx$$

$$4. \int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2} dx$$

$$5. \int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{5+4 \sin x+3 \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x+3 \sin x \cos x-\cos^2 x}$$

$$8. \int \sin^4 2x \cdot \cos^2 2x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx$$

#### Вариант 21

$$1. \int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{3x^2+1}{x^3+x-10} dx$$

$$3. \int (2x-5) \cos 4x dx$$

#### Вариант 20

$$1. \int \frac{3+x}{7+x^2} dx$$

$$2. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}} dx$$

$$3. \int (4x+7) \cos 3x dx$$

$$4. \int \frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x+1)^2} dx$$

$$5. \int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx$$

$$6. \int \frac{7+6 \sin x-5 \cos x}{1+\cos x} dx$$

$$7. \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+4 \cos^4 x} dx$$

$$8. \int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \cdot \sqrt[20]{x^7}} dx$$

#### Вариант 22

$$1. \int \frac{11x+4}{\sqrt{x^2-9}} dx$$

$$2. \int \frac{x^5}{3x^6-7} dx$$

$$3. \int (8-3x) \cos 5x dx$$

$$4. \int \frac{4x^4 + 8x^3 - x - 2}{x(x+1)^2} dx$$

$$5. \int \frac{4x^2 + 3x + 17}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{16 \sin^2 x + 7 \cos^2 x}$$

$$8. \int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{x - 4\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$10. \int \frac{(1 + \sqrt[5]{x^4})^{-\frac{1}{5}}}{x^2 \cdot \sqrt[25]{x^{11}}} dx$$

$$4. \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

$$5. \int \frac{7x - 10}{x^3 + 8} dx$$

$$6. \int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + 3}$$

$$8. \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$$

$$9. \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} dx$$

#### Вариант 23

$$1. \int \frac{1 - 10x}{1 + 100x^2} dx$$

$$2. \int \frac{x^4}{\sqrt{x^5 + 3}} dx$$

$$3. \int (x + 5) \sin 3x dx$$

$$4. \int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx$$

$$5. \int \frac{9x - 9}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x}$$

$$7. \int \frac{dx}{3 - 2 \sin^2 x}$$

$$8. \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[15]{x}} dx$$

#### Вариант 24

$$1. \int \frac{x - 2}{\sqrt{36 - x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x}} dx$$

$$3. \int (2 - 3x) \sin 2x dx$$

$$4. \int \frac{4x^2}{(x^2 - 2x + 1)(x + 1)} dx$$

$$5. \int \frac{36 dx}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)}$$

$$6. \int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}$$

$$7. \int \frac{3 \operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$$

$$8. \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{3x + \sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}} dx$$

#### Вариант 25

$$1. \int \frac{7x - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

#### Вариант 26

$$1. \int \frac{7 + 2x}{1 + 49x^2} dx$$

$$2. \int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5 - \sin 7x}} dx$$

$$3. \int \arcsin 5x dx$$

$$4. \int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$$

$$5. \int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{4\sin x - 6\cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}$$

$$8. \int \sin^3 x \cdot \cos^8 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}} dx$$

$$3. \int \ln(x+8) dx$$

$$4. \int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x} dx$$

$$5. \int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$$

$$7. \int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x} dx$$

$$8. \int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$9. \int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx$$

#### Вариант 27

$$1. \int \frac{x-4}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$2. \int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5} dx$$

$$3. \int (4x+3) \sin 5x dx$$

$$4. \int \frac{x+2}{x^3-x^2} dx$$

$$5. \int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$$

$$7. \int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$$

$$8. \int \sin^5 x \cdot \sqrt[5]{\cos^3 x} dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} dx$$

#### Вариант 29

$$1. \int \frac{3-7x}{1+x^2} dx$$

#### Вариант 28

$$1. \int \frac{36x+25}{\sqrt{x^2+2}} dx$$

$$2. \int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$$

$$3. \int (7x-10) \sin 4x dx$$

$$4. \int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)} dx$$

$$5. \int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$$

$$7. \int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$$

$$8. \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$$

$$9. \int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}} dx$$

$$10. \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} dx$$

#### Вариант 30

$$1. \int \frac{x+3}{\sqrt{64-x^2}} dx$$



2.  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6 - \cos^2 x}} dx$
3.  $\int \ln(x+12) dx$
4.  $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx$
5.  $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx$
6.  $\int \frac{dx}{3 \sin x - \cos x}$
7.  $\int \frac{tgx}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx$
8.  $\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx$
9.  $\int \frac{\sqrt{x}}{4x - \sqrt[3]{x^2}} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[6]{x^5}} dx$

2.  $\int \frac{7x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx$
3.  $\int \ln(2x-1) dx$
4.  $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$
5.  $\int \frac{3x + 13}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$
6.  $\int \frac{dx}{2 + \sin x - 3 \cos x}$
7.  $\int \frac{\sin^2 x}{3 \sin^2 x - \cos^2 x} dx$
8.  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$
9.  $\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{(\sqrt[3]{3x+1} + 1)\sqrt{x+1}} dx$
10.  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x \cdot \sqrt[15]{x^4}} dx$

## Планируемые результаты обучения для формирования компетенции и критерии их оценивания

Дисциплина Математика

Код, направление подготовки/специальность 21.03.01. Нефтегазовое дело

Профиль: «Бурение нефтяных и газовых скважин»; «Строительство и обслуживание систем транспорта, хранения и сбыта углеводородов»; «Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти»

Код компетенции	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)	Критерии оценивания результатов обучения (в баллах)			
		Менее 61	61 – 75	76 – 90	91 - 100
ОПК-1.4 Представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического уравнения (й).	Знать: представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений (ОПК-1.34)	Не имеет представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений	Удовлетворительно представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений	Хорошо представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений	Комплексно (отлично) представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений
	Уметь: применять математический аппарат при решении физических явлений (ОПК-1.У4)	Не умеет применять математический аппарат при решении физических явлений	Удовлетворительно применяет математический аппарат при решении физических явлений	Умеет хорошо применять математический аппарат при решении физических явлений	Сформированы умения применять математический аппарат при решении физических явлений
	Владеть: навыками в применении математического аппарата при исследовании профессионально-ориентированных задач (ОПК-1.В4)	Не владеет навыками в применении математического аппарата при исследовании профессионально-ориентированных задач	Удовлетворительно владеет навыками в применении математического аппарата при исследовании профессионально-ориентированных задач	Владеет навыками в применении математического аппарата при исследовании профессионально-ориентированных задач, но иногда нужна помощь преподавателя	Отлично владеет навыками в применении математического аппарата при исследовании профессионально-ориентированных задач без помощи преподавателя

Код компетенции	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)	Критерии оценивания результатов обучения (в баллах)			
		Менее 61	61 – 75	76 – 90	91 - 100
ОПК-1.6 Решение инженерных задач с помощью математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	Знать: теоретические основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии (ОПК-1.36)	Не знает теоретические основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	Удовлетворительно знает теоретические основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	Хорошо знает теоретические основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	Отлично знает теоретические основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии
	Уметь: применять знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач (ОПК-1.У6)	Не умеет применять знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Удовлетворительно применяет знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Хорошо применяет знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Отлично применяет знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач
	Владеть: математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач (ОПК-1.В6)	Не владеет математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Имеет удовлетворительные навыки владения математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Имеет хорошие навыки владения математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Отлично владеет математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач
ОПК-1.7 Решение уравнений, описывающих основные физические процессы, с применением	Знать: методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы (ОПК-1.37)	Не знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Удовлетворительно знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Хорошо знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Отлично знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы

Код компетенции	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)	Критерии оценивания результатов обучения (в баллах)			
		Менее 61	61 – 75	76 – 90	91 - 100
методов линейной алгебры и математического анализа	Уметь: применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы (ОПК-1.У7)	Не умеет применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Удовлетворительно применяет методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Хорошо применяет методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Самостоятельно, без помощи преподавателя, умеет применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
	Владеть: методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы (ОПК-1.В7)	Не владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Удовлетворительно владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Хорошо владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Отлично владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
ОПК-1.8 Обработка расчетных и экспериментальных данных вероятностно-статистическими методами	Знать: вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных (ОПК-1.38)	Не знает вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Удовлетворительно знает вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Хорошо знает вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Отлично знает вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных
	Уметь: применять вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных (ОПК-1.У8)	Не умеет применять вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Удовлетворительно применяет вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Применяет на практике вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных, но с помощью преподавателя	Самостоятельно, без помощи преподавателя, применяет на практике вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных

Код компетенции	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)	Критерии оценивания результатов обучения (в баллах)			
		Менее 61	61 – 75	76 – 90	91 - 100
	Владеть: вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных (ОПК-1.В8)	Не владеет вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных	Удовлетворительно владеет вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных	Хорошо владеет вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных, с помощью преподавателя	Отлично владеет вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных
ОПК-2.5 Оценка сходимости и результатов расчетов, получаемых по различным методикам.	Знать: различные методики для оценки сходимости результатов расчетов (ОПК-2.35)	Не знает различные методики для оценки сходимости результатов расчетов	Удовлетворительно знает различные методики для оценки сходимости результатов расчетов	Хорошо знает различные методики для оценки сходимости результатов расчетов	Отлично знает различные методики для оценки сходимости результатов расчетов
	Уметь: применять различные методики для оценки сходимости результатов расчетов (ОПК-2.У5)	Не умеет применять различные методики для оценки сходимости результатов расчетов	Удовлетворительно применяет различные методики для оценки сходимости результатов расчетов	Умеет с помощью преподавателя применять различные методики для оценки сходимости результатов расчетов	Умеет самостоятельно применять различные методики для оценки сходимости результатов расчетов
	Владеть: различными методиками для оценки сходимости результатов расчетов (ОПК-2.В5)	Не владеет различными методиками для оценки сходимости результатов расчетов	Удовлетворительно владеет различными методиками для оценки сходимости результатов расчетов	Хорошо владеет различными методиками для оценки сходимости результатов расчетов	В совершенстве владеет различными методиками для оценки сходимости результатов расчетов

Приложение 2

### КАРТА

#### обеспеченности дисциплины (модуля) учебной и учебно-методической литературой

Дисциплина Математика

Код, направление подготовки/специальность 21.03.01. Нефтегазовое дело

Профиль: «Бурение нефтяных и газовых скважин»; «Строительство и обслуживание систем транспорта, хранения и сбыта углеводородов»; «Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти»

№ п/	Название учебного, учебно-методического издания,	Количество экземпляров	Контингент обучающихся,	Обеспеченность обучающихся	Наличие электронног
------	--	------------------------	-------------------------	----------------------------	---------------------

п	автор, издательство, вид	в БИК (г. Сургут)	использующи х указанную литературу	литературой, %	о варианта в ЭБС (+/-)
1	Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 253 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02148-6. — Режим доступа : <a href="http://www.biblio-online.ru/book/017287B9-CF4C-4BAB-B25B-A074629F543C">www.biblio-online.ru/book/017287B9-CF4C-4BAB-B25B-A074629F543C</a>	Электронный вариант	150	100%	+
2	Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Б.А. Горлач. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 320 с. — Режим доступа: <a href="https://e.lanbook.com/book/4864">https://e.lanbook.com/book/4864</a> . — Загл. с экрана.	Электронный вариант	150	100%	+
3	Иляшенко, Л. К. Основы математической статистики [Текст] : учебное пособие / Л. К. Иляшенко. — Тюмень: ТИУ, 2017. — 78 с. <a href="http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/data/2017/09/08/17826.pdf">http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/data/2017/09/08/17826.pdf</a>	20	150	100%	+
4	Иляшенко, Л. К. Математика (Элементы теории вероятностей): И 49 учебное пособие / Л. К. Иляшенко. — Тюмень: ТИУ, 2016. — 94 с. <a href="http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/2017/04/16633.pdf">http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/2017/04/16633.pdf</a>	20	150	100%	+
5	Иляшенко Л. К. Краткий курс по математике. Типовые расчеты: учебное пособие / Л. К. Иляшенко. — Тюмень: ТИУ, 2016. — 104 с. <a href="http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/2017/01/4902016.pdf">http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/2017/01/4902016.pdf</a>	20	150	100%	+

Заведующий кафедрой ЕНГД \_\_\_\_\_ Л.К. Иляшенко

«30» 08 2019 г.

**Дополнения и изменения  
к рабочей программе дисциплины (модуля)**

на 20\_ - 20\_ учебный год

В рабочую программу вносятся следующие дополнения (изменения):

---

---

---

---

---

Дополнения и изменения внес:

\_\_\_\_\_

(должность, ученое звание, степень)

\_\_\_\_\_

(подпись)

\_\_\_\_\_

(И.О. Фамилия)

Дополнения (изменения) в рабочую программу рассмотрены и одобрены на заседании кафедры

\_\_\_\_\_.

(наименование кафедры)

Протокол от « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г. № \_\_\_\_.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ И.О. Фамилия. \_

**СОГЛАСОВАНО:**

Заведующий выпускающей кафедрой/

Руководитель образовательной программы \_\_\_\_\_ И.О. Фамилия. \_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.