МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ

Председатель КСН

_____________ Ю.В. Ваганов

«30» 08 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины / модуля ______Решение задач математической физики___

направление подготовки / специальность 21.03.01 Нефтегазовое дело

профиль/программа:
Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти;

форма обучения ___очная, очно-заочная_________________________

Рабочая программа разработана в соответствии с утвержденным учебным планом от 22.04.2019 г. и требованиями ОПОП 21.03.21 Нефтегазовое дело к результатам освоения дисциплины/модуля «Решение задач математической физики»

Рабочая программа рассмотрена
на заседании кафедры «Нефтегазовое дело»

Протокол № 1 от «30» августа 2019 г.

И. о. заведующего кафедрой ______________ Р.Д.Татлыев
(подпись)

СОГЛАСОВАНО:
И. о. заведующего выпускающей кафедрой/
Руководитель образовательной программы ______________ Р.Д.Татлыев
(подпись)

«30» августа 2019 г.

Рабочую программу разработал:

С.А. Лепихин, доцент кафедры ЕНГД, к.ф.- м.н. ______________
(И.О. Фамилия, должность, ученая степень, ученое звание) (подпись)

1. Цели и задачи освоения дисциплины/модуля

Целью изучения дисциплины является формирование у выпускников качественных математических и естественно-научных знаний, создание условий для овладения компетенциями, способствующими его социальной мобильности и устойчивости на рынке труда; формирование социально-личностных качества выпускников, овладение современными теоретическими знаниями в области уравнений математической физики и практическими навыками в решении задач.

Задачами изучения дисциплины является формирование у студентов умения анализировать и объяснять физические явления и процессы, исходя из общих законов и уравнений фундаментальных дисциплин, формирование у студентов умения и навыков в обосновании возможных путей повышения эффективности существующих и новых технологий в нефтегазовой отрасли.

2. Место дисциплины/модуля в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Решение задач математической физики» является дисциплиной вариативной части основной профессиональной образовательной программы по направлению 21.03.01 Нефтегазовое дело. Код дисциплины Б1.В.ДВ.05.02.

Разделы дисциплины связаны междисциплинарными связями с такими, как математика, а именно ее разделы: линейная алгебра, математический анализ, теории функций комплексного переменного, обыкновенные дифференциальные уравнения, физика.

3. Результаты обучения по дисциплине/модулю

Процесс изучения дисциплины/модуля направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции (ИДК)	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)
ПКС-10. Способность проводить прикладные научные исследования по проблемам нефтегазовой отрасли в соответствии с выбранной сферой профессиональной деятельности	ПКС-10.3 Использует физико-математический аппарат для решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессионально й деятельности	Знать: методы решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности (ПКС-10.З3)
		Уметь: анализировать задачи, возникающие в ходе профессиональной деятельности (ПКС-10.У3)
		Владеть: методикой решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности (ПКС-10.В3)

4. Объем дисциплины

Общий объем дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 часа.

Форма обучения	Курс/ семестр	Аудиторные занятия/контактная работа, час			Самостоятельная работа/контроль, час	Форма промежуточной аттестации
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия		
Очная	4/8	24	24	-	60/36	Экзамен
Очно-заочная	5/А	16	16	-	76/36	Экзамен

5. Структура и содержание дисциплины

5.1. Структура дисциплины

Очная форма обучения (ОФО)

№ п/п	Структура дисциплины		Аудиторные занятия, час.			СРС час.	Всего час.	Код ИДК	Оценочные средства
	Номер раздела	Наименование раздела	Л.	Пр	Лаб				
1	1	Классификация, канонические формы и методы решения уравнений и краевых задач математической физики	6	6	-	15	27	ПКС-10.3	Самостоятельные работы, тесты
2	2	Уравнения гиперболического типа	6	6	-	15	27		
3	3	Уравнения параболического типа	6	6	-	15	27		
4	4	Уравнения эллиптического типа	6	6	-	15	27		
		Контроль				36	36		Экзаменац. билеты (тесты)
		Итого:	**24**	**24**	**-**	**96**	**144**		

Очно-заочная форма обучения (ОЗФО)

№ п/п	Структура дисциплины		Аудиторные занятия, час.			СРС час.	Всего час.	Код ИДК	Оценочные средства
	Номер раздела	Наименование раздела	Л.	Пр	Лаб				
1	1	Классификация, канонические формы и методы решения уравнений и краевых задач математической физики	4	4	-	16	24	ПКС-10.3	Самостоятельные работы, тесты
2	2	Уравнения гиперболического типа	4	4	-	20	28		
3	3	Уравнения параболического типа	4	4	-	20	28		
4	4	Уравнения эллиптического типа	4	4	-	20	28		
		Контроль				36	36		Экзаменац. билеты (тесты)
		Итого:	**16**	**16**	**-**	**112**	**144**		

5.2. Содержание дисциплины

5.2.1. Содержание разделов дисциплины (дидактические единицы).

Раздел 1. Классификация, канонические формы и методы решения уравнений и краевых задач математической физики.

Предмет и методы математической физики. Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП), их классификация по форме: линейные, нелинейные и квазилинейные, однородные и неоднородные, с постоянными и с переменными коэффициентами. Формулы преобразования линейного ДУЧП 2-го порядка с двумя переменными к новым координатам. Понятие характеристического дифференциального уравнения. Получение общих интегралов характеристического дифференциального уравнения и соответствующих канонических форм уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов. Содержательная постановка задачи о поперечных колебаниях струны с двумя закрепленными концами при малых отклонениях от положения равновесия. Вывод одномерного волнового уравнения. Содержательная постановка задачи о распространении тепла в однородном стержне. Вывод одномерного уравнения теплопроводности. Понятие о начальных и граничных условиях 1-го (условия Дирихле), 2-го (условия Неймана) и 3-го рода. Частные предельные случаи постановок краевых задач (задачи на бесконечной и полубесконечной прямой и задача без начальных условий).

Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.

Получение и решение характеристического уравнения для волнового уравнения; построение соответствующего простейшего ДУЧП канонического вида. Вывод формулы Даламбера и ее физическая интерпретация (принцип суперпозиции двух волн). Понятие о характеристическом треугольнике. Обобщение формулы Даламбера для неоднородного волнового уравнения. Иллюстрация метода Фурье на примере задачи о колебании струны с закрепленными концами; построение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля и нахождение ее собственных значений и функций. Представление решения задачи о колебании струны с закрепленными концами в виде функционального ряда. Понятие о коэффициентах Фурье. Достаточные условия сходимости указанного ряда.

Раздел 3. Уравнения параболического типа

Общая 1-я краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Получение решения 1-ой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями методом Фурье; достаточные условия непрерывности указанного решения. Функция мгновенного точечного источника (температурного влияния), ее физический смысл. Теорема о неотрицательности функции мгновенного точечного источника. Первая краевая задача для однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой; ее качественное (содержательное) отличие от соответствующей задачи на бесконечной прямой. Представление решения указанной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных краевых задач, учитывающих влияние лишь начальных и граничных условий соответственно. Нечетное продолжение исходной задачи на бесконечную прямую. Вывод формулы решения первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой. Ее иллюстрация на содержательном примере. Содержательный смысл задач без начальных условий. 1-я краевая задача для однородного уравнения теплопроводности на полубесконечном стержне (с одним граничным условием). Формула Эйлера, связывающая функции синус, косинус и экспоненту. Решение указанной выше задачи. Решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности на ограниченном отрезке (с двумя граничными условиями). Задача о распространении температурных колебаний в почве. Физическая интерпретация формулы, описывающей распространение температурной волны в почве: 1-й, 2-й и 3-й законы Фурье.

Раздел 4. Уравнения эллиптического типа.

Физические процессы, приводящие к уравнениям эллиптического типа. Уравнение Лапласа; понятие гармонической функции. Стационарное, тепловое поле. Потенциальное течение жидкости. Уравнение Лапласа в полярной, цилиндрической и сферической системах координат.

5.2.2. Содержание дисциплины по видам учебных занятий

Лекционные занятия

№ п/п	Номер раздела	Объем, час.		Тема лекции
		ОФО	ОЗФО	
1	1	3	2	Классификация ДУЧП 2-го порядка и вывод канонических форм уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов
2		3	2	Вывод некоторых уравнений математической физики. Понятие о постановке краевых задач
3	2	3	2	Решение ДУЧП 2-го порядка гиперболического типа методом Даламбера на примере одномерного волнового уравнения
4		3	2	Метод разделения переменных (метод Фурье)
5	3	2	1	Уравнения параболического типа. Уравнение теплопроводности.
6		2	2	Краевые задачи для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой
7		2	1	Задачи без начальных условий для уравнения теплопроводности. Законы Фурье
8	4	3	2	Уравнения эллиптического типа
9		3	2	Уравнение Лапласа в полярной, цилиндрической, сферической системах координат
Итого:		**24**	**16**	

Практические занятия

№ п/п	Номер раздела	Объем, час.		Тема практического занятия
		ОФО	ОЗФО	
1	1	3	2	Приведение линейных ДУЧП к каноническому виду.
2		3	2	Упрощение линейных ДУЧП канонического вида.
3	2	3	2	Решение ДУЧП гиперболического типа методом Даламбера
4		3	2	Решение задачи колебания струны
5	3	3	2	Приведение линейных ДУЧП к каноническому виду
6		3	2	Решение задачи теплопроводности
7	4	3	2	Задача Дирихле для ДУЧП эллиптического типа в круге
8		3	2	Решение стационарной задачи распределения теплового поля
Итого:		**24**	**16**	

Самостоятельная работа обучающегося

№ п/п	Номер раздела	Объем, час.		Тема	Вид СРС
		ОФО	ОЗФО		

1	1	7	8	Классификация ДУЧП 2-го порядка	Проработка учеб. материала согласно темам раздела по конспекту и учебной литературе; решение задач и упражнений по обозначенным темам; подготовка к аттестац. тестированию
2		8	8	Понятие о постановке краевых задач	
3	2	7	10	Решение ДУЧП 2-го порядка гиперболического типа	
4		8	10	Решение задачи о колебании струны	
5	3	7	10	Решение ДУЧП 2-го порядка параболического типа	
6		8	10	Решение задачи теплопроводности	
7	4	7	10	Решение ДУЧП 2-го порядка эллиптического типа	
8		8	10	Решение стационарной задачи теплопроводности	
9		36	36	Подготовка к экзамену	
Итого:		**96**	**112**		

5.2.3. Преподавание дисциплины ведется с применением следующих традиционных и интерактивных видов образовательных технологий:

- лекции: лекция-визуализация с использованием мультимедийного материала; лекция проблемного характера; лекция-беседа;

- практические занятия: индивидуальная работа; разбор практических ситуаций; использование системы поддержки учебного процесса Educon.

6. Тематика курсовых работ/проектов

Курсовые работы/проекты учебным планом не предусмотрены.

7. Контрольные работы

Контрольные работы учебным планом не предусмотрены.

8. Оценка результатов освоения дисциплины

8.1. **Критерии оценивания степени полноты и качества освоения компетенций** в соответствии с планируемыми результатами обучения приведены в Приложении 1.

8.2. **Рейтинговая система** оценивания степени полноты и качества освоения компетенций обучающихся **очной формы обучения** представлена в таблице ниже.

№ п/п	Виды контрольных мероприятий текущего контроля	Кол-во баллов
1 текущая аттестация		
1	Выполнение самостоятельной работы	0-15
2	Решение аттестационного теста	0-15
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	**30**
2 текущая аттестация		
3	Выполнение самостоятельной работы	0-15
4	Решение аттестационного теста	0-15
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	**30**
3 текущая аттестация		

5	Выполнение самостоятельной работы	0-20
6	Решение аттестационного теста	0-20
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	**40**
	Итого:	**100**

8.3. Рейтинговая система оценивания степени полноты и качества освоения компетенций обучающихся **очно-заочной формы обучения** представлена в таблице ниже.

№	**Виды контрольных мероприятий**	**Баллы**
1	Выполнение самостоятельной работы	0-40
2	Решение теоретического теста	0-30
3	Экзамен	0-30
	Итого:	**100**

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

9.1. Перечень рекомендуемой литературы представлен в Приложении 2.

9.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

Перечень договоров ЭБС ТИУ БИК		
Учебный год	**Наименование документа с указанием реквизитов**	Срок действия
2019/2020	Собственная полнотекстовая база (ПБД) БИК ТИУ http://elib.tyuiu.ru/	
	Договор № 03-189/2017от 20.10.2017 об оказании услуг двухстороннего доступа к ресурсам научно-технической библиотеки ФГБОУ ВО РГУ Нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина http://elib.gubkin.ru/	С 20.10.2017 по 19.10.2019
	Договор № Б173/2017 04-6/2018 от 09.01.2018 на оказание услуг двухстороннего доступа к ресурсам научно-технической библиотеки ФГБОУ ВПО УГНТУ http://bibl.rusoil.net	с 25.12.2017 по 24.12.2019
	Договор № 04-7/2018 от 15.02.2018 об оказании услуг двухстороннего доступа к ресурсам научно-технической библиотеки ФГБОУ ВПО «Ухтинский государственный технический университет» http://lib.ugtu.net/books	С 15.02.2018 по 14.02.2020
	Гражданско-правовой договор № 5064-19 от 31.07.2019 с ООО «Политехресурс» http://www.studentlibrary.ru по предоставлению доступа к базе данных Консультант студента «Электронная библиотека технического ВУЗа»	С 01.09.2019 по 31.08.2020
	Договор № 5065-19 от 31.07.2019 на предоставление доступа к электронно-библиотечной системе IPRbooks с ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа» http://www.iprbookshop.ru/	С 01.09.2019 по 31.08. 2020
	Гражданско-правовой договор № 5066-19 от 31.07.2019 с ООО «Издательство ЛАНЬ» http://e.lanbook.com	С 01.09.2019 по 31.08. 2020
	Гражданско-правовой договор № 5068-19 от 09.07.2019 с ООО «Электронное издательство ЮРАЙТ» на оказание услуг по предоставлению доступа к ЭБС www.biblio-online.ru»	С 01.09.2019 по 31.08. 2020
	Договор №886-18 от 03.12.2018г. на оказание услуг по предоставлению доступа к изданиям электронно-библиотечной системы elibrary с ООО «РУНЭБ» http://elibrary.ru/ Количество	С 01.01.2019 по 31.12.2019

	пользователей неограниченно, онлайн-доступ с любой точки, где есть Интернет	
	Договор №5067 от 20.12.2019 на оказание услуг по предоставлению доступа к ресурсам базы данных «Научная электронная библиотека «eLibrary.ru»	С 01.01.2020 по 31.12.2020
	Гражданско-правовой договор №5931-19 от 29.08.2019 с ООО «КноРус медиа» на оказание услуг по предоставлению доступа к электронно-библиотечной системе BOOK.ru https://www.book.ru	С 01.09.2019 по 31.08.2020

9.3. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в т.ч. отечественного производства

1. Microsoft Windows (договор №5378-19 от 02.09.2019 до 01.09.2020).
2. Microsoft Office Professional Plus (договор №5378-19 от 02.09.2019 до 01.09.2020).
3. Adobe Acrobat Reader DC (свободно-распространяемое ПО).
4. Mathcad 14.0 (Лицензия PO Number 302/Ni010620, SCN 7A1355535 бессрочно)

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Помещения для проведения всех видов работ, предусмотренных учебным планом, укомплектованы необходимым оборудованием и техническими средствами обучения.

№ п/п	Перечень оборудования, необходимого для освоения дисциплины	Перечень технических средств обучения, необходимых для освоения дисциплины (демонстрационное оборудование)
		Комплект мультимедийного оборудования: проектор, экран, компьютер, акустическая система.

11. Методические указания по организации СРС

11.1. Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Практический курс дисциплины представлен аудиторными практическими занятиями.

Целью методических указаний является оказание помощи обучающимся в усвоении программного материала по решению задач математической физики через решение типовых задач.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Здесь и далее ограничимся рассмотрением u – функций лишь от двух переменных x и y.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (2.1)$$

Если *A, B, C* – функции от *x, y, u,* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, то уравнение квазилинейное.

Если *A, B, C* – функции от *x, y,* а функция

$$f=D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Ku+g ,$$

где *D, E, K* – функции от x , y ; $g(x,y)$ – возмущение, то уравнение (2.1) – линейное.

Если $g\equiv 0$, то (2.1) – линейное однородное,
если $g\not\equiv 0$, то (2.1) – линейное неоднородное.

Функция $u=u(x,y)$, которая обращает уравнение (2.1) в тождество, называется его ***решением***.

3. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть (2.1) – линейное уравнение. Обозначим $\delta=B^2-AC$, где *A, B, C* в общем случае зависят от *x, y*. Тогда $\delta=\delta(x,y)$ называется дискриминантом уравнения (2.1).

Если $\delta(x_0,y_0)>0$, $\delta(x_0,y_0)=0$, $\delta(x_0,y_0)<0$, то уравнение (2.1) называется соответственно уравнением гиперболического, параболического или эллиптического типа в точке (x_0,y_0).

Если $\delta(x,y)>0$, $\delta(x,y)=0$, $\delta(x,y)<0$ для любой точки (x,y) из области $\Omega\in R^2$, то уравнение (2.1) называется соответственно уравнением гиперболического, параболического или эллиптического типа в области Ω .

В качестве примеров рассмотрим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 .$$

В данном уравнении $A=1$, $B=0$, $C=-a^2$, $\delta=a^2>0$, то есть это уравнение гиперболического типа, описывающее колебательные процессы.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right) .$$

Видим, что $A=a^2$, $B=C=0$, $\delta=0$. Таким образом перед нами уравнение параболического типа, описывающее процессы теплопроводности и диффузии.

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 .$$

Здесь $A=1$, $B=0$, $C=1$, $\delta<0$. Таким образом перед нами уравнение эллиптического типа, описывающее состояния системы, которые не зависят от времени.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение:

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$$.

В этом уравнении $A = x$, $B = -1$, $C = y$, $\delta = 1 - xy$. Дискриминант δ зависит от x, y.

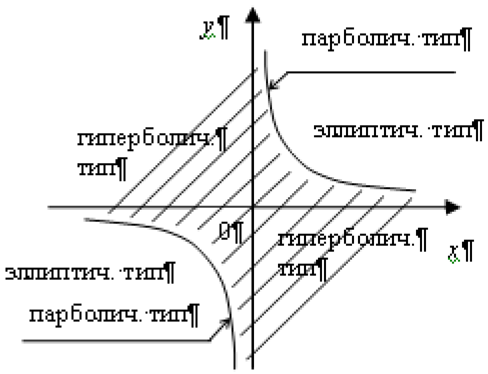
Тогда:

а) если $1 - xy > 0$, то есть $xy < 1$, то имеем уравнение гиперболического типа;

б) если $1 - xy = 0$, то есть $xy = 1$, то имеем уравнение параболического типа;

в) если $1 - xy < 0$, то есть $xy > 1$, то имеем уравнение эллиптического типа.

Графически случаи *а*), *б*), *в*) в области $\forall (x, y) \in \Omega$ можно представить следующим образом:



4. ИНВАРИАНТНОСТЬ ТИПА УРАВНЕНИЯ

Введём новые независимые переменные:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y). \end{cases} \quad (4.1)$$

Якобиан преобразования (4.1) будет иметь вид:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

где обозначено, например, $\partial\varphi / \partial x \equiv \partial\xi / \partial x$.

Если $J \neq 0$, то преобразование называется невырожденным.

Докажем, что при невырожденном преобразовании тип уравнения (2.1) не меняется.

Доказательство:

Считаем все производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Здесь учтено, что $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$ для непрерывной на области $\forall(\xi, \eta) \in \Omega^*$ функции $u = u(\xi, \eta)$.

Подставим найденные производные в уравнение (2.1):

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \quad (4.2)$$

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Тогда для дискриминанта уравнения (4.2) получаем:

$\overline{\delta} = \overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = J^2\delta$.

Видим, что знак $\overline{\delta}$ уравнения (4.2) и знак δ уравнения (2.1) одинаковый. Поэтому тип уравнения не изменился:

1) $\overline{A} = 0$, $\overline{C} = 0$ гиперболический $\Rightarrow \overline{\delta} > 0$;
2) $\overline{A} = 0$, $\overline{B} = 0$ параболический $\Rightarrow \overline{\delta} = 0$;
3) $\overline{B} = 0,$ $\overline{A} = \overline{C}$ эллиптический $\Rightarrow \overline{\delta} < 0$.

Утверждение доказано.

5. УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим уравнение вида:

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0. \quad (5.1)$$

Данное уравнение является уравнением в частных производных первого порядка.

Вместе с уравнением (5.1) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0. \quad (5.2)$$

Его формальное решение для дифференциала dy имеет вид:

$A \neq 0$, $dy = \dfrac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} dx$,

$$dy = \frac{B + \sqrt{\delta}}{A} dx, \quad (5.2\ a)$$

$$dy = \frac{B - \sqrt{\delta}}{A} dx. \quad (5.2\ б)$$

В свою очередь решение уравнений (5.2 *а*) и (5.2 *б*) находим в виде общих интегралов:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = c.$$

Лемма. Если $\tilde{\varphi}(x, y) = c$ - общий интеграл уравнения (5.2), то функция $z = \tilde{\varphi}(x, y)$ есть частное решение уравнения (5.1).

Данную лемму приводим без доказательства.

Функция $\tilde{\varphi}(x, y) = c$ называется характеристикой уравнения (5.2). А уравнения (5.1) и (5.2) называются ***уравнениями характеристик***.

6. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Поскольку для уравнений гиперболического типа $\delta > 0$, то уравнения (5.2 *а*) и (5.2 *б*) различны.

Интегрируем их:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x, y) = c_1 - \text{общий интеграл уравнения (5.2 а)}, \\ \tilde{\psi}(x, y) = c_2 - \text{общий интеграл уравнения (5.2 б)}. \end{cases}$$

Согласно (4.1) делаем замену переменных в уравнении (2.1) по правилу:

$$\begin{cases} \xi = \tilde{\varphi}(x, y), \\ \eta = \tilde{\psi}(x, y). \end{cases}$$

Тогда (см. выражения после уравнения (4.2)):

$\overline{\delta} = \overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} > 0$, $\overline{A}\,\overline{C} = 0$, $\overline{B} \neq 0$.

Делим (4.2) на $2\overline{B}$, получаем ***канонический вид*** уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Проверим, что наша замена невырожденная, то есть $J \neq 0$.

Рассмотрим $\tilde{\varphi}(x, y)$ – общий интеграл уравнения (5.2 *а*).

Дифференцируем его:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \overset{(5.2a)}{\equiv} \frac{B + \sqrt{\delta}}{A}.$$

Рассмотрим $\tilde{\psi}(x, y)$ – общий интеграл уравнения (5.2 *б*).

Дифференцируем его:

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}dx+\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}dy=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\Big/\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}\overset{(5.2б)}{\equiv}\frac{B-\sqrt{\delta}}{A}.$$

В результате имеем:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\Big/\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\neq\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\Big/\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y};\quad \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\neq 0\quad\Rightarrow J\neq 0.$$

Стало быть, замена невырожденная.

7. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Поскольку для уравнений параболического типа $\delta=0$, то уравнения (5.2 *а*) и (5.2 *б*) одинаковые и имеют вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A}.$$

Пусть $\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл этого уравнения.

В уравнении (2.1) делаем замену переменных:

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y)\ \text{– любая функция, удовлетворяющая требованию } J\neq 0.\end{cases}$$

Можно доказать, что в качестве функции $\psi(x,y)$ допустимо брать либо *x*, либо *y*. Тогда (см. выражения после уравнения (4.2)):

$$\overline{\delta}=\overline{B}^2-\overline{A}\,\overline{C}=0,\ \overline{A}\,\overline{C}=0,\ \overline{B}=0.$$

Докажем от противного, что $\overline{C}\neq 0$. Учтём, что $B^2-AC=0$, а значит и

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2-\frac{C}{A}=0.$$

При этом конечно $A\neq 0$.

Пусть (с учётом определения $\overline{C}$)

$$\overline{C}=0=A\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{2B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{C}{A}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)=$$

$$=A\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\frac{2B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\left(\frac{B}{A}\right)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right)=A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2.$$

Откуда:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{B}{A}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{B}{A}.\quad (*)$$

Учтём теперь, что $\varphi(x,y)=c$ – общий интеграл уравнения (5.2 *а*), которое теперь имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{A},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0.$$

Тогда:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y}\equiv\frac{B}{A}. \quad (**)$$

Сравнивая (*) и (**), находим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

то есть получили противоречие $J=0$. Следовательно $\overline{C}\neq 0$.

Делим (4.2) на $\overline{C}\neq 0$, получаем ***канонический вид*** уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

8. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Поскольку для уравнений эллиптического типа $\delta<0$, то (5.2 *а*) и (5.2 *б*) соответственно имеют вид:

$$dy=\frac{B+i\sqrt{-\delta}}{A}dx, \qquad dy=\frac{B-i\sqrt{-\delta}}{A}dx.$$

Запишем $\varphi(x,y)$ – и $\psi(x,y)$ – общие интегралы уравнений (5.2 *а*) и (5.2 *б*):

$$\varphi(x,y)\equiv\alpha(x,y)+i\text{в}(x,y)=c,$$

$$\psi(x,y)\equiv\alpha(x,y)-i\text{в}(x,y)=\overline{c},$$

и сделаем в (2.1) замену переменных:

$$\begin{cases}\xi_1=\varphi(x,y), & \overline{A}=0,\\ \eta_1=\psi(x,y), & \overline{C}=0.\end{cases}$$

Так как $\overline{\delta}=\overline{B}^2-\overline{A}\,\overline{C}<0$, то $\overline{B}\neq 0$, $\overline{A}\,\overline{C}=0$.

Делим (4.2) на $\overline{B}$. Получаем канонический вид уравнения эллиптического типа в комплексной области $\forall(\xi_1,\eta_1)\in\mathbf{C}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\eta_1}=f_1\left(\xi_1,\eta_1,u,\frac{\partial u}{\partial\xi_1},\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right),$$

$$\xi=\alpha=\frac{\xi_1+\eta_1}{2},$$

$$\eta=\text{в}=\frac{\xi_1-\eta_1}{2\mathrm{i}}.$$

Пересчитаем смешанную производную в действительных переменных ξ и η:

$$\frac{\partial u}{\partial\xi_1}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\xi_1}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\partial\eta_1}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right).$$

В итоге получаем *канонический вид* уравнения эллиптического типа в действительной области $\forall(\xi,\eta)\in \mathrm{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}= f_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Пример 1. Привести уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

к каноническому виду.

Решение:

В данном случае

$A=1$, $B=1$, $C=-3$.

$\delta=1+3=4$, $\delta>0$ - гиперболический тип.

Составим уравнения характеристик:

$$(dy)^2-2dxdy-3(dx)^2=0,$$

$$(y')^2-2y'-3=0,$$

$$y_1'=-1,\quad y_2'=3 \Rightarrow$$

$$y=-x+c_1,\quad y=3x+c_2,$$

$$x+y=\xi,\quad 3x-y=\eta,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-6\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+$$
$$+2\frac{\partial u}{\partial \xi}+6\frac{\partial u}{\partial \eta}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}-6\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$
$$16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+8\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\equiv f_1.$$

Пример 2. Привести уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma u=0$$

к каноническому виду.

Решение:

В данном случае

$A=1$, $B=-1$, $C=1$.

$\delta=0$ – параболический тип.

Составим уравнения характеристик:

$$(dy)^2+2dxdy+(dx)^2=0,$$
$$(y')^2+2y'+1=0,$$
$$y'_{1,2}=-1 \Rightarrow$$
$$y=-x+c, \quad c=x+y.$$

Сделаем замену переменных: $\xi=x+y$, $\eta=y$ (произвольная функция).

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\gamma u=0,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=-\left\{(\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}+\gamma u\right\}\equiv f_1.$$

Пример 3. Привести уравнение

$$xy^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x^2y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+x^3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

к каноническому виду.

Решение:

В данном случае

$A=xy^2$, $B=-x^2y$, $C=x^3$.

$\delta = x^4 y^2 - x^4 y^2 = 0$, $\delta = 0$ – параболический тип.

Составим уравнения характеристик:

$xy^2 (dy)^2 + 2x^2 y dx dy + x^3 (dx)^2 = 0$, $x \neq 0$,

$y^2 (dy)^2 + 2xy dx dy + x^2 (dx)^2 = 0$,

$(yy' + x)^2 = 0$,

$y dy = -x dx \Rightarrow$

$y^2 = -x^2 + c$,

$x^2 + y^2 = c$.

Сделаем замену переменных: $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x$ (произвольная функция).

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 2$,

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4x \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2y)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}$.

Подставив найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

$$4x^3 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2xy^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 8x^3 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$+ 4x^3 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2x^3 \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2xy^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - y^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

$$xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2x^3 \frac{\partial u}{\partial \xi} - y^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\left(2\frac{x^2}{y^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \equiv f_1.$$

Пример 4. Привести уравнение

$$(1 + x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

к каноническому виду.

Решение:

В данном случае

$A = 1 + x^2$, $B = 0$, $C = 1 + y^2$.

$\delta = -(1 + x^2)(1 + y^2) < 0$, $\delta < 0$ – эллиптический тип.

Составим уравнения характеристик:

$$\left(1+x^2\right)(dy)^2+\left(1+y^2\right)(dx)^2=0\ ,$$

$$\left(1+x^2\right)(y')^2+\left(1+y^2\right)=0\ ,$$

$$\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mp i\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=c\ .$$

Сделаем замену переменных: $\xi=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $\eta=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$.

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\ ,$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\frac{1}{1+x^2}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\ ,\quad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}\frac{1}{1+y^2}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{y}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}\ .$$

Подставив найденные выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем:

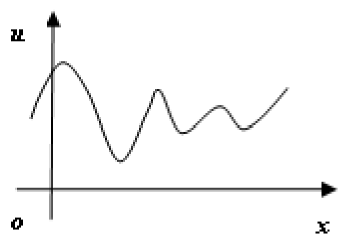
$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=0\equiv f_2\ .$$

9.ПРИМЕР ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩЕЙ К УРАВНЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

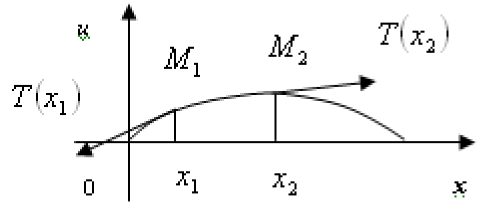
Рассмотрим натянутую струну, закреплённую на концах.

Определение. Под струной понимают тонкую нить, удовлетворяющую следующим условиям:

1. сила натяжения T_0, действующая на струну, столь значительна, что можно пренебречь действием силы тяжести. Пусть в состоянии покоя струна направлена по оси абсцисс.
2. Струна абсолютно гибкая, то есть она не сопротивляется изгибанию, не связанному с удлинением. Вектор натяжения направлен по касательной.
3. Все точки струны колеблются в одной и той же плоскости, и каждая точка колеблется по прямой перпендикулярной оси абсцисс. Плоскость колебания xOu. Здесь $u(x,t)$ – смещение струны в точке x в момент времени *t*.
4. Рассматриваются только малые колебания, так что можно пренебрегать квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей.



5. Выполняется закон Гука (см. курс общей физики): натяжение струны прямо пропорционально её удлинению.



Для дальнейшего изложения нам понадобятся три вспомогательных утверждения.

1. Докажем, что при выполнении вышеизложенных условий вектор силы натяжения струны не зависит от *t*, то есть $T(x,t) = T(x)$. Длину отрезка $[x_1, x_2]$ в момент времени *t* обозначим $l_{M_1M_2}$. Тогда

$$l_{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 .$$

Разность $x_2 - x_1$ есть длина отрезка $[x_1, x_2]$ в состоянии покоя. Длина со временем не изменилась, поэтому и натяжение струны по времени не изменилось.

2. Покажем также, что

$$\cos\alpha(x) = 1,$$

где $\alpha(x)$ – угол между касательной в точке с абсциссой *x* к струне в момент времени *t* и положительным направлением оси *x*. Имеем:

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1 .$$

3. Аналогично получаем: $$\sin\alpha(x) = \cos\alpha(x)\cdot tg\alpha(x) = 1\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Для вывода уравнения колебания струны воспользуемся принципом Даламбера, согласно которому: результирующая всех сил, действующих на дугу M_1M_2 (включая силу инерции), равна нулю.

Составим условие равенства нулю суммы проекций на ось *Ou* всех сил, действующих на дугу M_1M_2: сил натяжения, внешней силы, силы сопротивления среды и силы инерции.

Пусть $T(x_1)$ – сила натяжения в точке x_1. Её проекция на ось *Ox*:

$$T(x_1)\cos\left(\widehat{T(x_1), Ox}\right) = -T(x_1)\cos\alpha(x_1) = -T(x_1)$$; проекция на ось *Ou*:

$$T(x_1)\cos\left(\widehat{T(x_1), Ou}\right) = -T(x_1)\sin\alpha(x_1) = -T(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_1} .$$

Пусть $T(x_2)$ – сила натяжения в точке x_2. Её проекция на ось *Ox*:

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) = T(x_2)$$; проекция на ось *Ou*:

$$T(x_2)\sin\alpha(x_2) = T(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_2} .$$

Определим силу сопротивления, рассчитанную на единицу длины: $-k\frac{\partial u}{\partial t}$. Её проекция на ось *Ox* равна нулю. Здесь k – коэффициент сопротивления среды.

Проекция силы сопротивления на ось *Ou*: $\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx$.

Пусть на струну действует внешняя вынуждающая сила перпендикулярно оси абсцисс: $p(x,t)$. Проекция этой силы на ось *Ox* равна нулю; её проекция на ось *Ou*:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx.$$

Определим силу инерции: $-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Здесь $\rho(x)$ – линейная плотность массы струны. Проекция этой силы на ось *Ox* равна нулю. Её проекция на ось *Ou*:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx.$$

Тогда по принципу Даламбера имеем:

$$-T(x_1)+T(x_2)=0, \quad (9.1)$$

$$-T(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_1}+T(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_2}+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t}+p(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx=0. \quad (9.2)$$

Из (9.1) следует, что $T(x_1)=T(x_2)$; x_1 и x_2 – произвольные точки. Таким образом, вектор натяжения $T(x)=T_0$ не зависит от *x*.

Подставим T_0 в (9.2):

$$T_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_2}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_1}\right)+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t}+p(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx=0,$$

$$T_0\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(-k\frac{\partial u}{\partial t}+p(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx=0.$$

Используя свойство аддитивности по интегрируемым функциям определённого интеграла, запишем:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k\frac{\partial u}{\partial t}+p(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx=0. \quad (9.3)$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю в каждой точке x в любой момент времени t:

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-k\frac{\partial u}{\partial t}+p(x,t)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.4) и есть искомое уравнение колебаний струны.

Запишем некоторые частные случаи. Считаем $\rho(x)=\rho$ и k константами. Получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \quad (9.5)$$

где обозначено $\alpha=\dfrac{k}{\rho}$, $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f(x,t)=\dfrac{1}{\rho}p(x,t)$.

Если пренебречь сопротивлением $(k=0)$, то в случае отсутствия внешней силы $(p=0)$ уравнение (9.5) перейдёт в уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.6)$$

которое называется уравнением свободных колебаний струны.

11.2. Методические указания по организации самостоятельной работы

Самостоятельная работа определяется как индивидуальная или коллективная учебная деятельность, осуществляемая без непосредственного руководства педагога, но по его заданиям и под его контролем.

В учебном процессе выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная и внеаудиторная. Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию. Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется обучающимся по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа обучающихся является одной из основных форм внеаудиторной работы при реализации учебных планов и программ.

Основные задачи, решаемые при организации самостоятельной работы:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать справочную и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

По дисциплине «Решение задач математической физики» практикуются следующие виды и формы самостоятельной работы студентов:

- изучение избранных вопросов теоретического материала по рекомендованным источникам учебной литературы;
- повторение и переработка теоретического материала по учебникам и учебным пособиям, конспектам лекций;
- подготовка и выполнение практических работ;
- выполнение индивидуальные задания (решение задач, подготовка сообщений, докладов, исследовательские работы и др.);
- тестирование по материалам, разработанным преподавателем;
- подготовка к экзаменам и контрольному тестированию.

Самостоятельная работа может проходить в учебном кабинете, во время внеклассных мероприятий, дома.

Целью самостоятельной работы обучающихся является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа обучающихся способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Видами заданий, применяемыми для внеаудиторной самостоятельной работы по курсу физики, являются:

- *для овладения знаниями:* чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы), составление плана текста, конспектирование текста, выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами, учебно-исследовательская работа, использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета;
- *для закрепления и систематизации знаний:* работа с конспектом лекции, обработка текста, повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей, составление плана, составление таблиц для систематизации учебного материала, ответы на контрольные вопросы, тестирование;
- *для формирования умений:* решение задач и упражнений по образцу, решение вариативных задач.

При изучении теоретической части курса обучающимся рекомендуется составлять подробный конспект лекций. Прослушанный лекционный материал лекции должен потом быть проработан. Насколько эффективно обучающий это сделает, зависит и прочность усвоения знаний, и, соответственно, качество восприятия предстоящей лекции, так как он более целенаправленно будет её слушать. Заметим, что осмысление теоретического материала происходит во время описания материала своими словами, разъяснения его в первую очередь для себя. Естественно, что это конспектирование совершенно не то, что запись со слов лектора.

При составлении конспекта с учебника, первоисточника рекомендуется первоначально внимательно прочесть весь текст, разбить его отдельные законченные части (блоки) и озаглавить их, составив тем самым план конспекта. Далее выделить в каждой части основные моменты, и осмысленно записать их в конспект, желательно подкрепив собственными комментариями.

Для успешной самостоятельной работы студент должен планировать свое время и за основу рекомендуется брать рабочую программу учебной дисциплины и соответствующие методические указания, доступные в том числе через электронную систему поддержки образовательного процесса Едукон.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по курсу и отраженного в балльно-рейтинговой системе оценки знаний обучающихся, и может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

Оценивание самостоятельной деятельности обучающихся происходит согласно балльно-рейтинговой системе в рамках выделенных контролирующих мероприятий.

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно-экзаменационной сессией. В соответствии с принятой в вузе балльно-рейтинговой системой оценки знаний на сессию выходят только те обучающиеся, которые набрали за контрольные мероприятия, проводимые по дисциплине в течение семестра, менее 61 балла. Для этих обучающихся организуется промежуточный контроль в виде зачетов и экзаменов в традиционной или тестовой форме.

Учебным планом для направления подготовки 21.03.01 - «Нефтегазовое дело» при изучении дисциплины в качестве формы промежуточного контроля предусмотрен экзамен. Ниже представлены вопросы для подготовки к зачетам и экзаменам.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Предмет и методы математической физики.
2. Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП), их классификация по форме: линейные, нелинейные и квазилинейные, однородные и неоднородные, с постоянными и с переменными коэффициентами.
3. Понятие характеристического дифференциального уравнения. Получение общих интегралов характеристического дифференциального уравнения и соответствующих канонических форм уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.
4. Содержательная постановка задачи о распространении тепла в однородном стержне. Вывод одномерного уравнения теплопроводности.
5. Получение и решение характеристического уравнения для волнового уравнения; построение соответствующего простейшего ДУЧП канонического вида.
6. Вывод формулы Даламбера и ее физическая интерпретация (принцип суперпозиции двух волн).
7. Понятие о характеристическом треугольнике.
8. Обобщение формулы Даламбера для неоднородного волнового уравнения.
9. Понятие о коэффициентах Фурье. Достаточные условия сходимости указанного ряда.
10. Получение и решение характеристического уравнения для волнового уравнения; построение соответствующего простейшего ДУЧП канонического вида.
11. Общая 1-я краевая задача для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Получение решения 1-ой краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями методом Фурье; достаточные условия непрерывности указанного решения.
12. Функция мгновенного точечного источника (температурного влияния), ее физический смысл. Теорема о неотрицательности функции мгновенного точечного источника.
13. Формула Эйлера, связывающая функции синус, косинус и экспоненту.
14. Задача о распространении температурных колебаний в почве. Физическая интерпретация формулы, описывающей распространение температурной волны в почве: 1-й, 2-й и 3-й законы Фурье.
15. Физические процессы, приводящие к уравнениям эллиптического типа.
16. Уравнение Лапласа.
17. Понятие гармонической функции.
18. Стационарное, тепловое поле.
19. Потенциальное течение жидкости.
20. Уравнение Лапласа в полярной, цилиндрической и сферической системах координат.

Экзамен – форма заключительной проверки знаний, умений, навыков, степени развития обучающихся в системе образования.

Готовясь к экзамену, обучающиеся приводят в систему знания, полученные на лекциях и практических занятиях, разбирается в том, что осталось непонятным, и тогда изучаемая им дисциплина может быть воспринята в полном объеме с присущей ей строгостью и логичностью, ее практической направленностью. Обучающемуся на экзамене нужно не только знать сведения из тех или иных разделов математической физики, но и владеть ими практически: видеть физическую задачу в другой науке, уметь пользоваться физическими методами исследования в других естественных и технических науках, опираясь на методологию математического исследования, получать новые знания и т. д.

Но значение экзаменов не ограничивается проверкой знаний. Являясь естественным завершением работы обучающихся, они способствуют обобщению и закреплению знаний и умений, приведению их в строгую систему, а также устранению возникших в процессе занятий пробелов.

При подготовке к экзамену в традиционной форме обучающимся необходимо подготовить полные и развернутые ответы на выносимые на экзамен вопросы и задания. Основным источником информации при подготовке к экзамену, конечно, является конспекты лекций и практических занятий, сформированные в ходе учебного семестра и хорошо вам знакомые. Если вы аккуратно, постоянно и тщательно над ними работали, то с легкостью найдете в них практически все ответы на экзаменационные вопросы и задания. Однако не стоит пренебрегать учебниками и пособиями. Предлагаем иметь как минимум два-три разных дополнительных источника информации из рекомендуемой литературы. В процессе подготовки ответа на конкретный вопрос рекомендуем изучить соответствующую информацию сначала в конспекте, а потом в дополнительной литературе. Причем, обратиться к дополнительным источникам, рекомендуем в любом случае, даже, если после прочтения конспекта вам стал понятен ответ на вопрос. Во-первых, после повторного ознакомления с соответствующей информацией вы ее еще лучше усвоите и запомните, что может исключить вариант «зубрежки» материала, а во-вторых, в дополнительных источниках вы можете обнаружить важную информацию, которая не была упомянута преподавателем на занятиях или была вами не законспектирована.

Также весьма эффективным инструментом подготовки к экзамену является самостоятельное формулирование ответов на экзаменационные вопросы вслух, что позволяет проверить, насколько правильно и логически последовательно вы можете воспроизвести усвоенный вами учебный материал. Здесь полезным будут взаимные объяснения и обсуждения изучаемого материала между обучающимися.

Подготовка к экзамену или иным контролирующим мероприятиям, проводимым в форме тестирования, подобна подготовке к традиционному экзамену, за исключением необходимости формулировать устный ответ.

Приложение 1

Планируемые результаты обучения для формирования компетенции и критерии их оценивания

Дисциплина/модуль _Решение задач математической физики_
Код, направление подготовки/специальность _21.03.21 Нефтегазовое дело
Направленность/профиль:
Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти

Код компе-тенц.	Код и наимен. рез-та обучения по дисц-не	Критерии оценивания результатов обучения			
		Менее 61	61-75	76-90	91-100
ПКС-10.3	Знать (З10.3): методы решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Не знает: методы решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Имеет частичные представления о методах решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Обнаруживает достаточное знание методов решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Знает хорошо, не допуская ошибок, различные методы решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности
	Уметь (У10.3): анализировать задачи, возникающие в ходе профессиональной деятельности	Не умеет анализировать задачи, возникающие в ходе профессиональной деятельности	Умеет частично, допуская ряд ошибок, анализировать задачи, возникающие в ходе профессиональной деятельности	Умеет анализировать задачи, возникающие в ходе профессиональной деятельности	Умеет без ошибок анализировать задачи, возникающие в ходе профессиональной деятельности
	Владеть (В10.3) методикой решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Не владеет методикой решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Частично владеет методикой решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Хорошо владеет методикой решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности	Отлично владеет методикой решения расчетно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности

Приложение 2

КАРТА

обеспеченности дисциплины учебной и учебно-методической литературой

Дисциплина/модуль _Решение задач математической физики_

Код, направление подготовки/специальность _21.03.21 Нефтегазовое дело

Направленность/профиль:

Эксплуатация и обслуживание объектов добычи нефти

№ п/п	Название учебного, учебно-методического издания, автор, издательство, вид издания, год издания	Количество экземпляров в БИК	Контингент обуч-ся, использ-х указ. лит-ру	Обеспеченность обучающихся лит-рой, %	Наличие электронн. варианта в ЭБС (+/-)
1	Байков, В. А. Уравнения математической физики : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. А. Байков, А. В. Жибер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 255 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02925-3. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/ADC68CC7-52AA-4960-8804-AA60265355AD	электрон. вариант	150	100	www.biblio-online.ru/book/ADC68CC7-52AA-4960-8804-AA60265355AD
2	Емельянов, В.М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.М. Емельянов, Е.А. Рыбакина. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 216 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/71748.	электрон. вариант	150	100	https://e.lanbook.com/book/71748
3	Крупин В.Г., Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс] : учебное пособие / Крупин В.Г., Павлов А.Л., Попов Л.Г.. — Электрон. дан. — Москва : Издательский дом МЭИ, 2011. — 352 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/72217	электрон. вариант	150	100	https://e.lanbook.com/book/72217

И.о. заведующего кафедрой НД____________ Р.Д. Татлыев

«30» _08__ 2019 г.

Дополнения и изменения
к рабочей программе дисциплины (модуля)

____

на 20_ - 20_ учебный год

В рабочую программу вносятся следующие дополнения (изменения):
____

____

____

____

____

Дополнения и изменения внес:
________________________ ________________ ____________________
(должность, ученое звание, степень) *(подпись)* *(И.О. Фамилия)*

Дополнения (изменения) в рабочую программу рассмотрены и одобрены на заседании кафедры
________________________________.
(наименование кафедры)
Протокол от «____» __________20__ г. № _____.

Заведующий кафедрой________________ И.О. Фамилия.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей кафедрой/
Руководить образовательной программы ________________ И.О. Фамилия.

«______» __________ 20___ г.