

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ КОЛЕБАНИЙ

О. Л. Уманская, Н. А. Кривчун
Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

DEVELOPMENT OF AN OPTIMAL DESIGN METHODOLOGY OF A COMPOSITE PLATE UNDER VIBRATION

Olga L. Umanskaya, Natalia A. Krivchun
Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

Аннотация. В теории оптимального проектирования рассматриваются задачи, в которых надо определить условия работы конструкций, внутренние свойства их материала, формы и размеры, которые принимают максимальные или минимальные значения выбранной характеристики конструкции.

В данной работе рассматриваются конструкции, образованные из пространственно-волоконистых композитов. Приводятся три этапа оптимизации. Выбираются целевая функция, управляющая функция и ограничения. Рассматривается несколько вариантов граничных условий. Получено дифференциальное уравнение колебаний ортотропной пластины в перемещениях.

Ключевые слова: композитные материалы, целевая функция, оптимальное проектирование, пространственно-волоконистые композиты, ортотропная пластина

Abstract. In the theory of optimal design, problems are considered in which it is necessary to determine the working conditions of structures, the internal properties of the material of structures, shapes and sizes that take the maximum or minimum values of the selected design characteristic.

This paper deals with structures formed from spatial fiber composites. Three stages of optimization are given. The target function, control function, and limitations are selected. Several options for boundary conditions are considered. The differential equation of vibrations of an orthotropic plate in displacements is obtained.

Key words: composite materials, objective function, optimal design, spatially fibrous composites, orthotropic plate

Введение

При проектировании механических конструкций необходимо учитывать не только большое количество различного рода ограничений (к основным можно отнести ограничения на прочность, жесткость, виброустойчивость), но и назначение используемой конструкции. В зависимости от этого определяется целевая функция, которая обуславливает качество проектирования [1].

Наиболее часто применяемой функцией является общая стоимость изготовления конструкции, включающая затраты на материал.

В теории оптимального проектирования рассматриваются задачи, в которых надо определить условия работы, внутренние свойства материала конструкций, формы и размеры, которые принимают максимальные или минимальные значения выбранной характеристики конструкции. Теорию оптимального проектирования отличает широкое разнообразие постановок задач. Это объясняется тем, что и уравнения, определяющие нагружение и деформирование конструкции, и требования, предъявляемые к ее механическим характеристикам, существенно отличаются при рассмотрении различных типов конструкции (балок, колонн, пластин, оболочек), реологических свойств (упругости, пластичности, ползучести), внешних воздействий (поверхностных и объемных сил, статических и динамических нагрузок, тепловых воздействий), видов управляющих переменных (формы конструкции, распределения физических свойств по конструкции), предположения о степени полноты информации о виде внешних воздействий и способах закрепления конструкции. Точность модели и исходных данных также влияет на постановку задач.

На постановку задач оптимального проектирования оказывают существенное влияние: выбор моделей управляющих функций, функционалов, определенных на функциях состояния (фазовые переменные) и управляющих, выбор одного функционала, подлежащего оптимизации, и системы ограничений, накладываемых на управляющие переменные, функции состояния и рассматриваемые функционалы [2].

Рассматриваются конструкции, образованные из пространственно-волоконистых композитов. Конструктивными элементами пространственной системы являются стержни, пластинки, оболочки. Каждый отдельный элемент характеризуется приведенными (эквивалентными) жесткостями: мембранными, изгибными, крутильными, смешанными. На конструкцию действуют статические, распределенные и сосредоточенные нагрузки.

Объект и методы исследования

В данной статье исходными данными являются: композитная пластина, габаритные размеры, акустическая нагрузка. Композиционная пластина заменяется на однородную, анизотропную, с переменной жесткостью пластину и эквивалентную по прочности, динамическим параметрам. Процесс оптимизации производится в три этапа (рис. 1).

На первом этапе выбирается целевая функция, задается управляющая функция и накладываются ограничения. В качестве целевой функции принят минимум веса пластины – $P_{min} = (a, b, h, Y)$. Функция веса зависит от геометрических характеристик и структуры материала. Задача оптимизации заключается в отыскании управляющей функции, доставляющей минимум веса и удовлетворяющей ограничениям.

Управляющей функцией принимается приведенная цилиндрическая жесткость – $D_{yпр} = D_0 \cdot f(x, y)$, входящая в дифференциальное уравнение колебаний и управляющая частотой колебаний.

Ограничениями являются:

- условие усталостной прочности;
- исключение резонансной частоты;
- габаритные размеры пластины.

На втором этапе определяется приведенная цилиндрическая жесткость для волокнистого композитного материала $D_0 = (E_f, \nu_f, h)$ и управляющая функция для цилиндрической жесткости –

$$f(x, y) = f\left(\frac{M_x}{M_x^{\max}}, \frac{M_y}{M_y^{\max}}\right).$$

Для определения приведенной цилиндрической жесткости из пластины выделяется эле-

мент. Рассматривается цилиндрический изгиб выделенного элемента и составляется условие равновесия его по аналогии с изотропной пластиной, из которого получаем приведенную цилиндрическую жесткость. Управляющая функция позволяет от сложной системы перейти к однородной при условии, что они будут эквивалентны по прочности и динамическим параметрам. Для определения управляющей функции $F_{упр} = f(x, y)$ нам требуется рассчитать изгибающие моменты.

Для этого рассматриваем задачу жестко заземленной (шарнирно опертой), равномерно нагруженной прямоугольной пластинки.

На третьем этапе составляется и решается дифференциальное уравнение колебаний анизотропной пластины. Затем производится проверка ограничений.

Если ограничения выполняются, то процесс оптимизации заканчивается, а если не выполняются, то мы возвращаемся ко второму этапу.

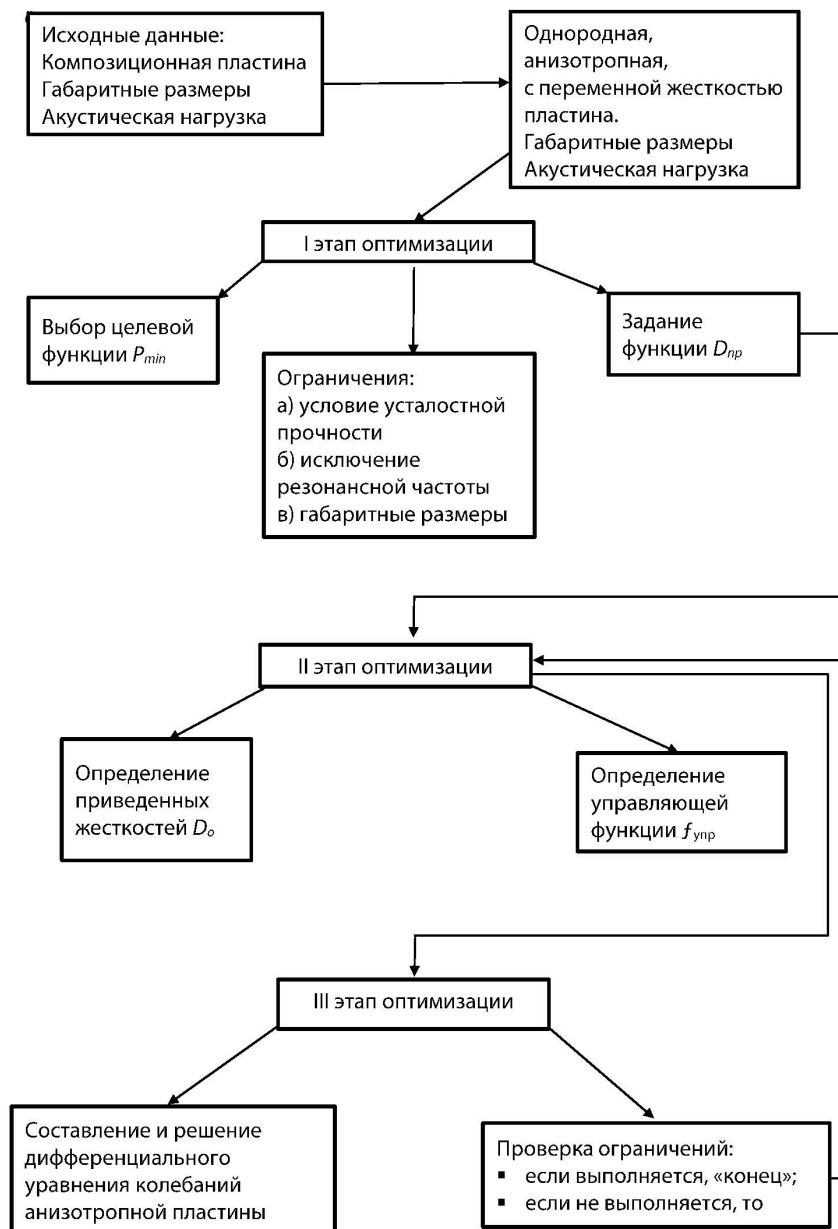


Рис. 1. Этапы оптимизации

Результаты

Рассмотрим основные уравнения теории упругости анизотропного [3] (в частности ортотропного) тела, находящегося под действием каких-либо сил, вызывающих деформацию материала. Поместим тело в декартовую систему координат [4]. Перемещения, которые получит каждая точка M , принадлежащая телу, запишутся:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z), \\ u_y &= u_y(x, y, z), \\ u_z &= u_z(x, y, z). \end{aligned} \quad (1)$$

Деформированное состояние сплошного тела в окрестности точки M характеризуется шестью составляющими деформациями, которые связаны с перемещениями u_x, u_y, u_z :

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{du_x}{dx}, & e_{yz} &= \frac{du_y}{dz} + \frac{du_z}{dy}, \\ e_y &= \frac{du_y}{dy}, & e_{zx} &= \frac{du_z}{dx} + \frac{du_x}{dz}, \\ e_z &= \frac{du_z}{dz}, & e_{xy} &= \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для тела, находящегося в равновесии, дифференциальные уравнения равновесия в координатах X, Y, Z имеют вид: [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $P_x = P_x(x, y, z)$, $P_y = P_y(x, y, z)$, $P_z = P_z(x, y, z)$ – проекция объемной силы, отнесенной к единице объема, на направления, соответственно, x, y, z . Подставив в правые части уравнений (3) инерционные члены:

$$p \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, p \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, p \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где ρ – плотность материала, t – время, получим дифференциальные уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат x, y, z .

При малых деформациях считается справедливым обобщенный закон Гука [5, 6]. Для однородного упругого тела его можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} e_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + \\ &+ a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy}, \\ e_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots \dots \dots + a_{26}\tau_{xy}, \\ e_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + \dots \dots \dots + a_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (5)$$

Проинтегрировав каждое из уравнений равновесия (3) при отсутствии объемных сил по z в пределах от $z = -l/2h$ до $z = l/2h$ и далее умножив первые два уравнения системы (3) и проинтегрировав результат по z в тех же пределах, получим пять дифференциальных уравнений равновесия пластинки, написанных относительно восьми внутренних усилий $M_x, M_y, H, T_x, T_y, S, N_x, N_y$:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = -X_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = -Y_2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = N_x - hX_1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = N_y - hY_1. \quad (10)$$

При получении уравнений (6)–(10) были использованы и условия на поверхности.

Как известно [7, 8], однородные граничные условия в случае трехмерной задачи теории толстой плиты в условиях некоторой идеализации закрепления края данного конструктивного элемента (в частности, шарнирного опирания или жесткой заделки [9]), реально осуществляемого

на практике, условно формируются следующим образом:

а) свободный край:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{xy} = 0; \quad (11)$$

б) шарнирно опертый край:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad u_z = 0; \quad (12)$$

или

$$\sigma_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0;$$

в) жестко заделанный край:

$$\begin{aligned} u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0; \\ u_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad u_z = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Наряду с однородными граничными условиями могут быть и неоднородные граничные условия. Для примера рассмотрим три варианта неоднородных граничных условий [10]:

а) нагруженный край:

$$\begin{aligned} T_x = T_x^*, \quad M_x = M_x^*, \quad N_x = N_x^*, \\ S = S^*, \quad H = H^*, \end{aligned} \quad (14)$$

где $T_x^* \dots, H^*$ – усилия, приложенные к рассматриваемому краю; в частном случае некоторые из них могут быть равны нулю;

б) шарнирно опертый край, нагруженный силами и моментами:

$$\begin{aligned} T_x = T_x^*, \quad M_x = M_x^*, \quad w = 0, \\ S = S^*, \quad H = H^*; \end{aligned} \quad (15)$$

в) смещенный край:

$$\begin{aligned} u + a_{55}K_1^+(z_0)\varphi + a_{45}K_2^+(z_0)\psi + \\ + \frac{z_0^2}{2h}(a_{55}X_2 + a_{45}Y_2) = \frac{u^+ + u^-}{2}, \\ v + a_{44}K_2^+(z_0)\psi + a_{45}K_1^+(z_0)\varphi + \\ + \frac{z_0^2}{2h}(a_{45}X_2 + a_{44}Y_2) = \frac{v^+ + v^-}{2}, \\ w = w^*, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w}{\partial x} + a_{55}\frac{K_1(z_0)}{2z_0}\varphi + a_{45}\frac{K_2(z_0)}{2z_0}\psi + \\ + (a_{55}X_1 + a_{45}Y_1) = \frac{u^+ + u^-}{2z_0}, \\ -\frac{\partial w}{\partial y} + a_{44}\frac{K_2^-(z_0)}{2z_0}\varphi + \\ + (a_{45}X_1 + a_{44}Y_1) = \frac{v^+ + v^-}{2z_0}, \end{aligned}$$

где w^* – заданное нормальное перемещение края, u^+, u^-, v^+, v^- – заданные тангенциальные перемещения края, соответствующие $z = \pm z_0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний ортотропной пластины. Выделим статическую сторону пластины переменной толщины из ортотропного материала, находящегося под действием статической нагрузки, нормальной к середине плоскости.

Выделим из пластины элемент с размерами dx, dy и толщиной h . Действующие погонные усилия и моменты связаны с напряжениями следующими соотношениями.

Перерезывающие силы и касательные напряжения:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz. \quad (17)$$

Изгибающие моменты и нормальные напряжения:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz. \quad (18)$$

Крутящие моменты:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} z dz. \quad (19)$$

Для жесткой пластины при действии только нагрузки q , нормальной к срединной поверхности, можно получить следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (22)$$

Исключая Q_x , Q_y и учитывая, что $M_{xy} = M_{yx}$, получаем одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{ph \partial^2 w}{\partial t^2} = -q. \quad (23)$$

Внутренние усилия в ортотропной пластине выражаются через перемещения и упругие постоянные:

$$M_x = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (24)$$

$$M_y = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (25)$$

$$M_{xy} = -\frac{Gh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (26)$$

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (27)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (28)$$

Для ортотропной пластины с учетом зависимостей (24)–(28) получаем дифференциальное уравнение колебаний в перемещениях:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{ph \partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (29)$$

где D_1 и D_2 – изгибные жесткости по главным направлениям; D_3 – крутильная жесткость; данные величины определяются по формулам:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}, D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} \quad (30)$$

$$D_3 = \frac{Gh^3}{12}.$$

Вывод

Представленные дифференциальные уравнения позволяют решать, в отличие от существующих моделей, задачи изгиба анизотропных пластин при одновременном учете влияния колебаний на напряженно-деформированное состояние конструкции. Тот факт, что дифференциальные уравнения имеют высокий порядок, позволяет учитывать сложные и разнообразные кинематические и статические условия закрепления слоев оболочки.

Библиографический список

1. Пульпинский, Я. С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм : специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» : диссертация на соискание степени кандидата технических наук / Я. С. Пульпинский ; Пензенский государственный университет. – Пенза, 2006. – 141 с. – Текст : непосредственный.
2. Холькин, С. А. Решение конструктивно нелинейных задач строительной механики адаптивными методами : специальность 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» : диссертация на соискание степени кандидата технических наук / А. С. Холькин ; Пензенский государственный университет. – Пенза, 2002. – 121 с. – Текст : непосредственный.
3. Новожилов, В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов. – Ленинград : Судпромгиз, 1985. – 370 с. – Текст : непосредственный.
4. Батырев, К. Г. Вариант оценки пределов применимости технической теории анизотропных пластин : специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела» : диссертация на соискание степени кандидата физико-математических наук / К. Г. Батырев ; Тульский государственный университет. – Тула, 2002. – 121 с. – Текст : непосредственный.
5. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – Москва : Гостехиздат, 1977. – 415 с. – Текст : непосредственный.

6. Рабинович, А. Л. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов / А. Л. Рабинович. – Текст : непосредственный // Труды ЦАГИ / Министерство авиационной промышленности Союза ССР. Центр. аэрогидродинам. ин-т им. проф. Н. Е. Жуковского : № 582. – Москва, 1946. – с. 55.
7. Лурье, А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – Москва : Гостехиздат, 1955. – 491 с. – Текст : непосредственный.
8. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – Москва : Наука, 1976. – 512 с. – Текст : непосредственный.
9. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – Москва : Наука, 1988. – 556 с. – Текст : непосредственный.
10. Канович, М. З. Соппротивление композиционных материалов / М. З. Канович, Н. Н. Трофимов. – Москва : Мир, 2004. – 504 с. – Текст : непосредственный.

References

1. Pul'pinskiy, Ya. S. (2006). Matematicheskoe modelirovanie obolochek vrashcheniya slozhnykh form. Diss. ... kand. tekhn. nauk. Penza, 140 p. (In Russian).
2. Khol'kin, S. A. (2002). Reshenie konstruktivno nelineynykh zadach stroitel'noy mekhaniki adaptatsionnymi metodami. Diss. ... kand. tekhn. nauk. Penza, 144 p. (In Russian).
3. Novozhilov, V. V. (1985). Teoriya uprugosti. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 370 p. (In Russian).
4. Batyrev K. G. (2002). Variant otsenki predelov primenimosti tekhnicheskoy teorii ani-zotropnykh plastin. Diss. ... kand. ph.-m. nauk. Tula, 121 p. (In Russian).
5. Lekhnitskiy, S. G. (1977). Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. Moscow, Gostekhizdat Publ., 415 p. (In Russian).
6. Rabinovich, A. L. (1946). Ob uprugikh postoyannykh i prochnosti anizotropnykh materialov. Moscow, Byuro novoy tekhniki Publ., 55 p. (In Russian).
7. Lur'e, A. I. (1955). Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti. Moscow, Gostekhizdat Publ., 491 p. (In Russian).
8. Gol'denveyzer, A. L. (1976). Teoriya uprugikh tonkikh obolochek. Moscow, Nauka Publ., 512 p. (In Russian).
9. Vasidzu, K. (1987). Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. Moscow, Mir Publ., 542 p. (In Russian).
10. Kanovich, M. Z., & Trofimov, N. N. (2004). Soprotivlenie kompozitsionnykh materialov. Moscow, Mir Publ., 504 p. (In Russian).

Сведения об авторах:

Уманская Ольга Леонидовна, к. т. н., доцент кафедры прикладной механики, Тюменский индустриальный университет, e-mail: umanskayaol@tyuiu.ru

Кривчун Наталья Аркадьевна, к. т. н., доцент кафедры прикладной механики, Тюменский индустриальный университет, e-mail: krivhunna@tyuiu.ru

Information about the authors

Olga L. Umanskaya, Candidate of Engineering, Associate Professor at the Department of Applied Mechanics, Industrial University of Tyumen, e-mail: umanskayaol@tyuiu.ru

Natalia A. Krivchun, Candidate of Engineering, Associate Professor at the Department of Applied Mechanics, Industrial University of Tyumen, e-mail: krivhunna@tyuiu.ru

Для цитирования: Уманская, О. Л. Разработка методики оптимального проектирования композитной пластины в условиях колебаний / О. Л. Уманская, Н. А. Кривчун. – Текст : непосредственный // Архитектура, строительство, транспорт. – 2021. – № 1. – С. 30–36.

For citation: Umanskaya, O. L., & Krivchun, N. A. (2021). Development of an optimal design methodology of a composite plate under vibration. Arkhitektura, stroitel'stvo, transport [Architecture, construction, transport], (1), pp. 30-36. (In Russian).