МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ИНДУСТРИАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______________ Р.Д. Татлыев
«18» мая 2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММ

дисциплины/модуля:______Математика____________
направление подготовки: 21.03.01 Нефтегазовое дело_
направленность (профиль): Проектирование, сооружение и эксплуатация нефтегазотранспортных систем______
форма обучения: ____очная_______________________

Рабочая программа рассмотрена
на заседании кафедры естественно-научных и гуманитарных дисциплин
Протокол № 7 от «18» 05. 2023г.

1. Цели и задачи освоения дисциплины/модуля

Цель дисциплины/модуля: формирование личности обучающихся, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, а также обучение методам обработки и анализа результатов экспериментальных данных. Дисциплина «Математика» закладывает фундамент последующего обучения в магистратуре, аспирантуре.

Задачи дисциплины/модуля: научить обучающихся использовать основные понятия математики и их взаимосвязь в других дисциплинах, приемы исследования и решения математически формализованных задач и возможность их использования при решении прикладных задач.

2. Место дисциплины/модуля в структуре ОПОП ВО

Дисциплина/модуль относится к дисциплинам обязательной части, формируемой участниками образовательных отношений учебного плана.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины являются:

знание основных принципов, понятий и законов математики, возможности применения математических законов в конкретных областях науки и техники;

умения формулировать задачу в математических терминах и находить пути ее решения; самостоятельно расширять математические знания;

владение математическими методами для обработки результатов практической деятельности и анализа полученных результатов.

Содержание дисциплины/модуля служит основой для освоения дисциплин «Физика», «Химия», «Электротехника» и т.д.

Бакалавр, независимо от профиля подготовки, должен понимать и использовать в своей практической деятельности базовые концепции и методы, развитые в современном естествознании.

3. Результаты обучения по дисциплине/модулю

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Таблица 3.1

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции (ИДК)	Код и наименование результата обучения по дисциплине (модулю)
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Осуществляет выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи	Знать: З1 актуальные российские и зарубежные источники по дисциплине
		Уметь: У1 осуществлять выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи
		Владеть: В1 навыками поиска, сбора и обработки информации, необходимой для решения поставленной задачи
УК-2. Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные	УК-2.1. Проводит анализ поставленной цели и формулирует совокупность взаимосвязанных	Знать: З2 цель и совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения

способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	задач, которые необходимо решить для ее достижения	Уметь: У2 проводить анализ поставленной цели и формировать совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения
		Владеть: В2 навыком постановки проанализированной цели и формирования совокупности взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения
	УК-2.2. Выбирает оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Знать: З3 оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений
		Уметь: У3 решать задачи, выбирая оптимальный способ вычисления, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений
		Владеть: В3 навыком решения задач, выбирая оптимальный способ вычисления, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений
ОПК-1. Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания	ОПК.Я-1.1. Демонстрирует знание основных законов естественных и математических наук для решения типовых задач	Знать: З4 основные законы естественных и математических наук для решения типовых задач
		Уметь: У4 решать типовые задачи с применением основных законов естественных и математических наук
		Владеть: В4 навыками решения типовых задач
	ОПК-1.3. Представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)	Знать: З5 представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических процессов и явлений
		Уметь: У5 применять математический аппарат при решении базовых физических процессов и явлений
		Владеть: В5 навыками в применении математического аппарата при представлении базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)
	ОПК-1.5. Решает инженерные задачи с помощью математического аппарата векторной алгебры,	Знать: З6 теоретические основы математического аппарата векторной алгебры,

	аналитической геометрии	аналитической геометрии
		Уметь: У6 применять знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач
		Владеть: В6 математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач
	ОПК-1.6.Решает уравнения, описывающие основные физические процессы, с применением методов линейной алгебры и математического анализа	Знать: З7 методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
		Уметь: У7 применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
		Владеть: В7 методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
	ОПК-1.7. Обрабатывает расчетные и экспериментальные данные вероятностно-статическими методами	Знать: З8 вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных
		Уметь: У8 применять вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных
		Владеть: В8 вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных

4. Объем дисциплины/модуля

Общий объем дисциплины/модуля составляет 9 зачетных единиц, 324 часа.

Таблица 4.1.

Форма обучения	Курс/ семестр	Аудиторные занятия/контактная работа, час.			Самостоятельная работа, час.	Контроль, час.	Форма промежуточной аттестации
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия			
очная	1/1	18	34	-	20	36	Экзамен
Очная	1/2	18	34	-	20	36	Экзамен
очная	2/3	18	34	-	20	36	Экзамен

5. Структура и содержание дисциплины/модуля

5.1. Структура дисциплины/модуля

очная форма обучения (ОФО)

Таблица 5.1.1

№ п/п	Структура дисциплины/модуля		Аудиторные занятия, час.			СРС, час. (в том числе контроль)	Всего, час.	Код ИДК	Оценочные средства
	Номер раздела	Наименование раздела	Л.	Пр.	Лаб.				
1	1	Линейная и векторная алгебра	3	4	-	5	12	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.5 ОПК-1.6	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет
2	2	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	3	6	-	5	14	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.5	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет
3	3	Основные понятия математического анализа	6	8	-	5	19	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет
4	4	Дифференциальное исчисление	6	16		5	27	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.6	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет, математический диктант
	Экзамен (контроль)					36	36	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.5 ОПК-1.6	Экзаменационные вопросы и задания
Итого за 1 семестр:			**18**	**34**	**-**	**56**	**108**		
5	5	Интегральное исчисление функции одной переменной	4	10	-	6	20	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2	Аудиторная

								ОПК.Я-1.1	контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет, математический диктант
6	6	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	5	8	-	6	19	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет
7	7	Дифференциальные уравнения 1-го порядка	9	16	-	8	33	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.6	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет
	Экзамен (контроль)					36	36	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.6	Экзаменационные вопросы и задания
		Итого за 2 семестр:	**18**	**34**	**-**	**56**	**108**		
8	8	Дифференциальные уравнения высших порядков и их системы	4	8	-	7	19	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.6	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет
9	9	Ряды	10	14		6	30	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК-1.6 ОПК.Я-1.1	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет, терминологический диктант
10	10	Теория вероятностей и элементы математической статистики	4	12	-	7	23	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.7	Аудиторная контрольная работа, коллоквиумтиповой расчет,

									самостоятельная работа
	Экзамен (контроль)					36	36	УК-1.1 УК-2.1 УК-2.2 ОПК.Я-1.1 ОПК-1.3 ОПК-1.6 ОПК-1.7	Экзаменационные вопросы и задания
Итого за 3 семестр:			**18**	**34**		**56**	**108**		
Итого:			**54**	**102**	**-**	**168**	**324**		

5.2. Содержание дисциплины/модуля.

5.2.1. Содержание разделов дисциплины/модуля (дидактические единицы).

Раздел 1. Линейная и векторная алгебра. Матрицы. Действия над матрицами. Определители: определение, свойства. Обратная матрица. Ранг матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, матричный метод. Система координат в пространстве. Векторы: основные понятия. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, координатная форма, приложения. Векторное произведение векторов: определение, свойства, координатная форма, приложения. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, координатная форма, приложения.

Раздел 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Декартовы и полярные координаты. Различные виды уравнения прямой на плоскости, основные задачи. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Прямая и плоскость в пространстве: основные задачи. Уравнения линии и поверхности в пространстве: основные понятия. Поверхности второго порядка.

Раздел 3. Основные понятия математического анализа. Множества: основные понятия. Окрестность точки. Функция: понятие функции, область определения, область значений функции. Числовые функции. График функции. Способы задания функций. Обратная функция. Сложная функция. Основные элементарные функции и их графики. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Предел функции. Односторонние пределы. Теоремы о пределах. Бесконечно малые функции: определение, основные теоремы. Бесконечно большие функции. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функции: применение к вычислению пределов. Непрерывность функций. Основные теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции и их классификация. Основные свойства непрерывных функций.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление. Производная функции: определение, геометрический и физический смысл. Уравнения касательной и нормали. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности. Арифметические свойства производной. Производная сложной и обратной функций. Таблица производных. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Дифференциал функции: определение, геометрический смысл. Основные теоремы о дифференциалах. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Производная и дифференциал высших порядков. Применение производной к исследованию функций. Основные теоремы дифференциального исчисления. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. Монотонность и экстремумы функции: определения, необходимые и достаточные условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Выпуклость и точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения графика. Частные производные первого и высших порядков. Полный дифференциал функции. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производная сложной функции. Полная производная. Дифференцирование неявной функции.

Раздел 5. Интегральное исчисление функции одной переменной. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Основные методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной). Метод интегрирования по частям. Определение рациональной дроби. Интегрирование простейших рациональных дробей. Разложение правильной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование иррациональных функции: квадратичные иррациональности, дробно-линейная подстановка, тригонометрическая подстановка, интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства определенного интеграла. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Геометрические и физические приложения определенного интеграла. Приближенное вычисление определенных интегралов: формула прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (Симпсона). Несобственные интегралы. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1 рода). Несобственные интегралы от неограниченных функций (2 рода).

Раздел 6. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Двойной интеграл: основные понятия и определения, геометрический и физический смысл, основные свойства. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных и полярных координатах. Приложения двойного интеграла. Тройной интеграл: определение, свойства. Вычисление тройного интеграла в прямоугольных, сферических и цилиндрических координатах, некоторые приложения тройного интеграла. Криволинейный интеграл I рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Криволинейный интеграл II рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Поверхностный интеграл I рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Поверхностный интеграл II рода: определение, свойства, вычисление, приложения. Дифференциальные операции и интегральные формы теории поля.

Раздел 7. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка: простейшие; в полных дифференциалах и сводящиеся к ним; с разделяющимися переменными; однородные; линейные первого порядка; уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах (интегрирующий множитель). Уравнение Лагранжа и Клеро.

Раздел 8. Дифференциальные уравнения высших порядков и их системы. Уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка: простейшие; уравнения, не содержащие искомую функцию; уравнения, не содержащие независимую переменную. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами.

Структура общего решения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Раздел 9. Ряды. Последовательности и ряды. Понятие числового ряда. Сходимость и сумма ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов. Функциональные ряды: основные понятия. Степенной ряд. Сходимость степенных рядов. Область сходимости степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды: ряды Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена. Некоторые приложения степенных рядов. Элементы функционального анализа. Тригонометрический ряд и его основные свойства. Сходимость ряда Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Раздел 10. Теория вероятностей и элементы математической статистики. Основные понятия теории вероятностей. Элементы комбинаторики. Основные теоремы теории вероятностей. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число наступлений события. Теорема Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики. Основные законы распределения непрерывной случайной величины. Вариационные ряды и их построение. Проверка статистических гипотез. Корреляционная зависимость величин.

5.2.2. Содержание дисциплины/модуля по видам учебных занятий.

Лекционные занятия

Таблица 5.2.1

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Тема лекции (разделы)	
		ОФО	
1	1	3	Линейная и векторная алгебра
2	2	3	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
3	3	6	Основные понятия математического анализа
4	4	6	Дифференциальное исчисление
5	5	4	Интегральное исчисление функции одной переменной
6	6	5	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
7	7	9	Дифференциальные уравнения 1-го порядка
8	8	4	Дифференциальные уравнения высших порядков и их системы
9	9	10	Ряды
10	10	4	Теория вероятностей и элементы математической статистики
Итого:		54	

Практические занятия

Таблица 5.2.2

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Тема практического занятия (разделы)	
		ОФО	
1	1	4	Линейная и векторная алгебра
2	2	6	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве
3	3	8	Основные понятия математического анализа
4	4	16	Дифференциальное исчисление
5	5	10	Интегральное исчисление функции одной переменной
6	6	8	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
7	7	16	Дифференциальные уравнения 1-го порядка
8	8	8	Дифференциальные уравнения высших порядков и их системы
9	9	14	Ряды
10	10	12	Теория вероятностей и элементы математической статистики
Итого:		102	

Лабораторные работы

Лабораторные работы учебным планом не предусмотрены

Самостоятельная работа студента

Таблица 5.2.3

№ п/п	Номер раздела дисциплины	Тема (разделы)		Вид СРС
		ОФО		
1	1	5	Линейная и векторная алгебра	Подготовка к выполнению типового расчета и коллоквиуму, к математическому диктанту
2	2	5	Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве	
3	3	5	Основные понятия математического анализа	
4	4	5	Дифференциальное исчисление	
5	5	6	Интегральное исчисление функции одной переменной	
6	6	6	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	
7	7	8	Дифференциальные уравнения 1-го порядка	
8	8	7	Дифференциальные уравнения высших порядков и их системы	
9	9	6	Ряды	
10	10	7	Теория вероятностей и элементы математической статистики	

11	Экзамен	108		Экзаменационные вопросы и задания. Выполнение контрольной работы
Итого:		168		

5.2.3. Преподавание дисциплины/модуля ведется с применением следующих видов образовательных технологий: лекция-диалог (лекционные занятия); лекции-визуализации в PowerPoint в диалоговом режиме (в случае интерактивного метода обучения); работа в малых группах, разбор практических ситуаций (практические занятия), рейтинговая технология контроля учебной деятельности.

6. Тематика курсовых работ/проектов

Курсовые работы/проекты учебным планом не предусмотрены

7. Контрольные работы

Контрольные работы учебным планом не предусмотрены

8. Оценка результатов освоения дисциплины/модуля

8.1. Критерии оценивания степени полноты и качества освоения компетенций в соответствии с планируемыми результатами обучения приведены в Приложении 1.

8.2. Рейтинговая система оценивания степени полноты и качества освоения компетенций обучающихся очной формы обучения.

Таблица 8.1

1 семестр

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Выполнение типового расчета	0-6
2	Аудиторная контрольная работа «Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ»	0-15
3	Коллоквиум «Линейная алгебра. Матрица. Решение СЛАУ»	0-9
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
4	Выполнение типового расчета	0-6
5	Аудиторная контрольная работа «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»	0-15
6	Коллоквиум «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»	0-9
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
7	Аудиторная контрольная работа «Введение в математический анализ: числовые последовательности. Пределы»	0-10
8	Коллоквиум «Первый и второй замечательные пределы»	0-6
9	Выполнение типового расчета	0-3
10	Математический диктант «Таблица производных»	0-2
11	Коллоквиум «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»	0-9

12	Аудиторная контрольная работа «Приложения производной функции одной переменной»	0-10
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	ВСЕГО	**100**

2 семестр

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Коллоквиум «Неопределенный интеграл»	0-9
2	Аудиторная контрольная работа «Неопределенный интеграл»	0-12
3	Выполнение типового расчета	0-4
4	Математический диктант «Таблица неопределенных интегралов»	0-5
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
5	Коллоквиум «Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл»	0-9
6	Аудиторная контрольная работа «Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл»	0-15
7	Выполнение типового расчета «Кратные интегралы. Поверхностные интегралы»	0-6
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		
8	Коллоквиум «Дифференциальные уравнения первого порядка»	0-10
9	Аудиторная контрольная работа «Вычисление дифференциальных уравнений первого порядка»	0-15
10	Самостоятельная работа «Дифференциальные уравнения первого порядка»	0-5
11	Выполнение типового расчета	0-10
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	ВСЕГО	**100**

3 семестр

№ п/п	Виды мероприятий в рамках текущего контроля	Количество баллов
1 текущая аттестация		
1	Коллоквиум «Дифференциальные уравнения высших порядков»	0-9
2	Аудиторная контрольная работа «Дифференциальные уравнения высших порядков»	0-10
3	Терминологический диктант	0-5
4	Выполнение типового расчета	0-6
	ИТОГО за первую текущую аттестацию	0-30
2 текущая аттестация		
5	Коллоквиум «Числовые ряды»	0-9
6	Аудиторная контрольная работа «Числовые ряды»	0-5
7	Коллоквиум «Функциональные ряды»	0-6
8	Самостоятельная работа «Функциональные ряды»	0-6
9	Выполнение типового расчета	0-4
	ИТОГО за вторую текущую аттестацию	0-30
3 текущая аттестация		

10	Коллоквиум «Теория вероятностей (Основные понятия теории вероятностей. Предельные теоремы. Виды случайных величин. Числовые характеристики СВ»	0-12
11	Аудиторная контрольная работа «Теория вероятностей (Основные понятия теории вероятностей. Предельные теоремы. Виды случайных величин. Числовые характеристики СВ»	0-20
12	Коллоквиум «Элементы математической статистики»	0-8
	ИТОГО за третью текущую аттестацию	0-40
	ВСЕГО	**100**

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины/модуля

9.1. Перечень рекомендуемой литературы представлен в Приложении 2.

9.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

- Электронный каталог/Электронная библиотека ТИУ http://webirbis.tsogu.ru/
- Цифровой образовательный ресурс – библиотечная система IPR SMART — https://www.iprbookshop.ru/
- Электронно-библиотечная система «Консультант студента» www.studentlibrary.ru
- Электронно-библиотечная система «Лань» https://e.lanbook.com
- Образовательная платформа ЮРАЙТ www.urait.ru
- Научная электронная библиотека ELIBRARY.RU http://www.elibrary.ru
- Национальная электронная библиотека (НЭБ)
- Библиотеки нефтяных вузов России:
- Электронная нефтегазовая библиотека РГУ нефти и газа им. Губкина http://elib.gubkin.ru/,
- Электронная библиотека Уфимского государственного нефтяного технического университета http://bibl.rusoil.net/,
- Библиотечно-информационный комплекс Ухтинского государственного технического университета УГТУ http://lib.ugtu.net/books
- Электронная справочная система нормативно-технической документации «Технорматив»

9.3 Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, в т.ч.отечеств енного производства:

1. Microsoft Office Professional Plus;
2. Microsoft Windows.

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины/модуля

Помещения для проведения всех видов работы, предусмотренных учебным планом, укомплектованы необходимым оборудованием и техническими средствами обучения.

Таблица 10.1

Обеспеченность материально-технических условий реализации ОПОП ВО

№ п/п	Наименование учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), практики, иных видов учебной деятельности, предусмотренных учебным планом образовательной программы	Наименование помещений для проведения всех видов учебной деятельности, предусмотренной учебным планом, в том числе помещения для самостоятельной работы, с указанием перечня основного оборудования, учебно-наглядных пособий и используемого программного обеспечения	Адрес (местоположение) помещений для проведения всех видов учебной деятельности, предусмотренной учебным планом (в случае реализации образовательной программы в сетевой форме дополнительно указывается наименование

			организации, с которой заключен договор)
1	2	3	4
1	Математика	Лекционные и практические занятия: Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа; групповых и индивидуальных консультаций; текущего контроля и промежуточной аттестации, Оснащенность: Учебная мебель: столы, стулья, доска аудиторная. Компьютер в комплекте, проектор, проекционный экран, наглядные таблицы производных и интегралов	Тюменская область, г. Сургут, ул Энтузиастов, д. 38

11. Методические указания по организации СРС

11.1. Методические указания по подготовке к практическим занятиям.

Важной формой работы студента является систематическая и планомерная подготовка к практическому занятию. После лекции студент должен познакомиться с планом практических занятий и списком обязательной и дополнительной литературы, которую необходимо прочитать, изучить и законспектировать. Разъяснение по вопросам новой темы студенты получают у преподавателя в конце предыдущего практического занятия.

Подготовка к практическому занятию требует, прежде всего, чтения рекомендуемых источников и монографических работ. Важным этапом в самостоятельной работе студента является повторение материала по конспекту лекции. Одна из главных составляющих внеаудиторной подготовки – работа с книгой. Она предполагает: внимательное прочтение, критическое осмысление содержания, обоснование собственной позиции по дискуссионным моментам, постановки интересующих вопросов, которые могут стать предметом обсуждения на практическом занятии.

В начале практического занятия должен присутствовать организационный момент и вступительная часть. Преподаватель произносит краткую вступительную речь, где формулируются основные вопросы и проблемы, способы их решения в процессе работы.

В конце каждой темы подводятся итоги, предлагаются темы докладов, выносятся вопросы для самоподготовки. Как средство контроля и учета знаний студентов в течение семестра проводятся контрольные работы.

Практические занятия являются одной из важнейших форм обучения студентов: они позволяют студентам закрепить, углубить и конкретизировать знания по курсу алгебры и теории чисел, подготовиться к научно-исследовательской деятельности. В процессе работы на практических занятиях обучающийся должен совершенствовать умения и навыки самостоятельного анализа источников и научной литературы, что необходимо для научно-исследовательской работы. Усвоенный материал необходимо научиться применять при решении практических задач.

11.2. Методические указания по организации самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по математике – это педагогически управляемый процесс самостоятельной деятельности студентов, обеспечивающий реализацию целей и задач по овладению необходимым объемом знаний, умений и навыков, опыта творческой работы и развитию профессиональных интеллектуально-волевых, нравственных качеств будущего специалиста.

Выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная, выполняется на занятиях под руководством преподавателя и по его заданию; внеаудиторная, выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основные виды аудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика»: ответы на проблемные вопросы преподавателя; формулировка вопросов студентам, преподавателю; выполнение письменных заданий, тестирование; выполнение творческих работ; выступление с сообщением по новому материалу; конспектирование, работа с книгой.

Основные виды внеаудиторной самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Математика» - работа с учебником; конспектирование отдельного вопроса пройденной темы; работа со справочной литературой; решение задач; использование поисковых систем в среде Интернет.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных знаний и практических умений и навыков студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать специальную, справочную литературу, Интернет;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских знаний.

Лимит времени для проведения самостоятельной работы студентов аудиторно отводится преподавателем непосредственно на занятии, для каждого вида работы определенный.

Самостоятельная работа студентов при изучении нового материала

Работу по формированию умений, обеспечивающих самостоятельное изучение студентом нового материала, нужно начинать на занятии. Можно предложить группе самостоятельно изучить тот или иной материал учебника. Для проведения такой работы, во-первых, преподаватель должен быть убежден, что каждый студент готов к ней, во-вторых, студент должен знать, что конкретно он должен знать и уметь после проведения этой работы. Системой предварительных заданий, устных и письменных упражнений преподавателю следует подготовить необходимую базу, обеспечивающую самостоятельность в этой работе. Специальные вопросы и задания, ориентирующие студентов и ведущие к конечной цели данной работы, заранее можно написать на доске (или проецировать на экран). При наличии вопросов в учебнике можно просто указать, на какие вопросы студент должен уметь ответить, изучив данный материал. Среди вопросов к работе можно предлагать и такие, ответа на которые непосредственно нет в учебнике, и поэтому требуются некоторые размышления студента. Возможно, не все студенты сумеют ответить на них. Однако, каждая самостоятельная работа по изучению нового материала должна обязательно завершаться проверкой понимания изученного. Желательно, чтобы самостоятельно изученный на уроке материал был и закреплен здесь же. В этом случае дома его придется повторять лишь отдельным студентам, и перегрузки домашними заданиями не будет. Вопрос о том, сколько времени придется тратить на выполнение домашнего задания, во многом зависит от того, как понят студентом материал на занятии и как он закреплен. А это, в свою очередь, обеспечивается наличием у студентов умений и навыков самостоятельной работы и навыков учебного труда.

Необходимо рационально выделить материал для самостоятельного изучения в сочетании с другими формами работы.

Самостоятельная работа студентов при решении задач

В процессе изучения математики наряду с некоторыми теоретическими сведениями студенты овладевают определенными приемами решения задач. Обычно с такими приемами знакомит сам преподаватель, показывая решение задач нового образца. Наиболее эффективным при этом является такой подход, при котором преподаватель раскрывает перед студентами технологию решения задачи, показывает, чем мотивировано применение некоторого метода решения, чем обусловлен выбор того или иного пути.

Работа над задачей тоже может быть полностью самостоятельной работой студентов. Она преследует несколько целей:

- продолжить формирование умений самостоятельно изучать текст, который в данном случае представляет собой задачу;
- обучить рассуждениям;
- обучить оформлению решения задач.

К тому же студенты будут знать, что у них имеется образец рассуждений и оформления задачи, к которому они могут обратиться при решении другой задачи или при проверке правильности своего решения.

Непременным условием усвоения новых теоретических сведений и овладения новыми приемами решения задач является выполнение студентами тренировочных упражнений, в ходе которого приобретенные знания становятся полным достоянием студентов. Как известно, существуют две формы организации такой тренировочной работы - фронтальная работа и самостоятельная работа. Фронтальная работа на занятиях математики - это традиционная, давно сложившаяся форма. Схематически ее можно описать так: один из студентов выполняет задание на доске, остальные выполняют это же задание в тетрадях. Самостоятельная работа студентов на уроке состоит в выполнении без помощи преподавателя и товарищей некоторого задания.

Большие возможности для подготовки студентов к творческому труду и самостоятельному пополнению знаний имеет самостоятельное выполнение заданий. В этом случае студент без какой-либо помощи должен наметить пути решения, правильно выполнить все построения, преобразования, вычисления и т. п. В таком случае мысль студента работает наиболее интенсивно. Он приобретает практический навык работы в ситуации, с которой ему неоднократно придется сталкиваться в последующей трудовой деятельности. Вместе с тем самостоятельная работа студентов на занятиях математики имеет и свои недостатки. Усилия студента могут оказаться напрасными и не привести к результату, если он недостаточно подготовлен к решению поставленной задачи. Студент не слышит комментариев к решению, а рассуждения, которые он проводит мысленно, могут быть не всегда правильными и достаточно полными, причем возможности обнаружить это студент не имеет. Вообще при самостоятельном выполнении заданий мыслительные процессы не могут быть проконтролированы преподавателем. Поэтому даже верный ответ может оказаться случайным. Исправление ошибок, допущенных при самостоятельной работе, происходит в ходе ее проверки по окончании всей работы. Поэтому, выполняя упражнение самостоятельно, студент, не усвоивший материал, может повторять одну и ту же ошибку от примера к примеру, и невольно закрепить неправильный алгоритм.

Самостоятельные работы и индивидуальные задания, тесты – виды работы, обеспечивающие повышение уровня самостоятельной деятельности студентов

Наиболее распространенной формой работы, обеспечивающей повышение самостоятельной деятельности студентов, являются самостоятельные работы и индивидуальные задания.

По своему дидактическому назначению самостоятельные работы и индивидуальные задания можно разбить на два основных вида: обучающие и контролирующие.

В филиале ТИУ г. Сургута по математике разработан ряд самостоятельных работ и индивидуальных заданий разных видов. Они составляют дидактические материалы, которые являются составной частью комплексного методического обеспечения дисциплины.

Тесты обеспечивают информацию по ряду качественных характеристик знаний и умений студентов. Тестовые задания удобно использовать при организации самостоятельной работы в режиме самоконтроля, при повторении учебного материала. Тестовые задания с выбором ответов особенно ценны тем, что каждому студенту дается возможность четко представить себе объем обязательных требований к овладению знаниями по теме (нескольким темам, всей дисциплине), объективно оценить свои успехи, получить конкретные указания для дополнительной и индивидуальной работы.

При работе самостоятельно студент должен уметь правильно конспектировать текст. Для этого необходимо соблюдать некоторые рекомендации, а именно:

- конспект должен быть легко обозримым и легко читаемым;
- заголовок пишется цветной пастой;
- левая треть листа отводится под поле для отметок студента, 2/3 справа предназначены для конспектирования;
- подзаголовки пишутся темной пастой и подчеркиваются цветной;
- в тексте конспекта высота строчных букв 2 мм (бумага в клетку, записи в каждой строке);
- абзацы текста отделяются друг от друга пробельной строкой, чтобы облегчить чтение записей;
- в каждом абзаце ключевое слово подчеркивается цветной пастой;
- в конце изучаемой темы оставляется чистая страница для построения структурно - логической схемы или сжатой информации иного типа.

Студенту необходимо уметь работать с книгой (источником), выделять главное из текста. Для этого необходимо:

- познакомиться с титульным листом;
- проанализировать заглавие;
- обратить внимание на классификационную характеристику книги в подзаголовке;
- обратить внимание на год издания книги;
- прочитать оглавление книги, если есть - аннотацию, предисловие и послесловие к ней;
- обратить внимание на все непонятные слова и выражения;
- подумать, что непонятно в самом содержании текста;
- по ходу чтения составить вопросы к тексту и выдвинуть свои предложения о дальнейшем его содержании;
- проверить верность выдвинутых предложений при чтении последующих частей текста;
- выделить в тексте главное, существенное;
- особое внимание уделить первым фразам каждого абзаца, к которым потом «привязываются» все другие мысли, входящие в этот абзац;
- сформулировать главную мысль текста, его основные положения (тезисы);
- прочитать повторно трудные части текста, проверить правильность их понимания;
- выработать собственное отношение к предмету речи, придумать аргументы в обоснование своей точки зрения;
- соотнести прочитанное с другой известной информацией по той же теме, определить сходства и расхождения;
- обобщая полученные сведения, сформулировать собственные выводы на основе прочитанного.

При самостоятельной работе над конспектом, студенту необходимо научиться отделять главное от второстепенного, наиболее существенную информацию. Главной является информация, имеющая наиболее существенное значение для понимания данной темы, вопроса.

К ней относятся определения научных понятий, формулировки законов, правил, перечисление принципов, основные мысли (положения, утверждения) автора, его выводы, классификация явлений, фактов.

Второстепенная информация либо детализирует, разъясняет главную информацию, либо отражает вытекающие из этой информации конкретные следствия и практические рекомендации. К этому типу информации относятся аргументы, обоснования, примеры, подробные характеристики отдельных явления, второстепенные факты (из биографии писателя, из истории создания произведения), а также разного рода комментарии (объяснительные замечания, толкования) тех или иных отрывков из произведений художественной литературы. После этого необходимо ознакомиться с сильными позициями в учебном и научном тексте это:1) заглавие,2) зачин (введение), 3) концовка (заключение).

Сильные позиции есть не только во всем тексте, но и в его частях. В абзаце наиболее информативным является первое (начальное) предложение, содержащее тезис, то есть основное положение автора, которое затем конкретизируется в основной части абзаца. В отдельном предложении более информативной является, как правило, вторая его часть, то есть предикат, который отражает новое.

Главная информация в тексте отражается не только позиционно, но и графически (курсивом, жирным шрифтом, подчеркиванием и другими способами).

Главную информацию нужно воспроизвести в реферате полностью, без каких - либо существенных сокращений, порой в буквальном смысле - дословно. Второстепенная же информация же должна быть подвергнута смысловой переработке и сжатию.

Задачи для самостоятельного решения

Задание 1

Составить матрицы А и В такой размерности, чтобы можно было найти:

1) 2А+4В;

2) матрицу С, если 2С-4В=2А;

3) А-2В.

Задание 2

Найти произведение матрицы А на В и В на А, если возможно

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}1 & -9 & 0\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\-3 & 3 & 1\\3 & 0 & -4\end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\0 & 5 & -3\\2 & 6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\-3 & 4 & 1\\3 & 6 & -4\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\1 & 0 & -3\\2 & 6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\-3 & 4 & 1\\8 & 6 & -1\end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1 & 4\\7 & 1 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

Задание 3

Вычислить определители третьего порядка

1. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\5 & 6 & 2\\0 & -5 & 7\end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\5 & -6 & 2\\0 & -5 & 0\end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\-5 & 6 & 0\\0 & -5 & 7\end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix}12 & 3 & 0\\5 & 16 & 2\\0 & -5 & 17\end{vmatrix}$;

5. $\begin{vmatrix}-3 & 3 & 1\\5 & 4 & 2\\0 & -5 & -7\end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\9 & -6 & 2\\0 & -5 & 7\end{vmatrix}$; 7. $\begin{vmatrix}2 & 6 & 1\\8 & 6 & -2\\0 & 5 & 7\end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\5 & 10 & 2\\0 & -5 & 7\end{vmatrix}$;

9. $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\5 & 6 & 6\\10 & -5 & 7\end{vmatrix}$; 10. $\begin{vmatrix}7 & 3 & 11\\5 & 6 & 2\\0 & -5 & 0\end{vmatrix}$.

Задание 4

Вычислить определитель четвертого порядка

1. $\begin{vmatrix}3 & -7 & 2 & 0\\8 & 4 & 5 & -1\\1 & 0 & -3 & 2\\7 & 6 & -7 & 0\end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\-5 & 6 & 7 & 7\\3 & -2 & 3 & 5\\1 & 3 & -4 & 2\end{vmatrix}$, 3. $\begin{vmatrix}2 & 5 & 9 & 7\\-8 & 0 & 8 & 3\\-5 & 2 & 8 & 0\\1 & 2 & -4 & 3\end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 7 & 0\\4 & 7 & 8 & -3\\0 & 3 & 5 & 1\\5 & 3 & 8 & 2\end{vmatrix}$,

5. $\begin{vmatrix}3 & 3 & 5 & 4\\0 & 8 & -4 & 1\\5 & 6 & 2 & 3\\2 & 3 & -7 & 8\end{vmatrix}$, 6. $\begin{vmatrix}3 & 4 & 1 & 0\\-6 & 7 & 4 & 3\\5 & 7 & 2 & 9\\0 & 7 & -4 & 1\end{vmatrix}$, 7. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 2 & 3\\0 & -6 & 7 & 5\\2 & 5 & 4 & -6\\2 & 6 & 3 & 1\end{vmatrix}$, 8. $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\4 & 5 & 4 & 3\\0 & 8 & 5 & 4\\6 & 3 & 5 & 3\end{vmatrix}$,

9. $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\6 & 5 & 4 & 3\\-7 & 6 & -6 & 4\\0 & 7 & 5 & 4\end{vmatrix}$, 10. $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & 2\\1 & 0 & 7 & 6\\3 & 4 & 6 & -8\\3 & 4 & 7 & 5\end{vmatrix}$.

Задание 5

Найти обратную матрицу для данной

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 6

Найти ранг матрицы

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 7

Исследовать систему уравнений на совместность

1. $\begin{cases} x+3y+3z=14, \\ 3x+2y+z=10, \\ x+y+z=6, \\ 2x+3y-z=5, \\ x+y=3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+5y+4z+3t=1, \\ 2x-y+2z-t=0, \\ 5x+3y+8z+t=1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x+2y=4, \\ x-4y=-1, \\ 7x+10y=12, \\ 5x+6y=8, \\ 3x-16y=-5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+5y+4z=1, \\ 2x+10y+8z=3, \\ 3x+15y+12z=5. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x-3y+2z=-1, \\ x+9y+6z=3, \\ x+3y+4z=1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+2y+z+3t=-1, \\ -y+2z-4t=4, \\ 3x+6y+3z+9t=-3, \\ 2x+4y+2z+6t=-2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+7y+3z+t=5, \\ x+3y+5z-2t=3, \\ x+5y-3z+8t=1, \\ 5x+18y+4z+5t=12. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-4, \\ 4x-7y+z=5. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x-2y+3z=1, \\ 6x-4y-z=2, \\ -3x+2y+11z=3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 3z - 2t + 4u = 1, \\ 4x - 2y + 5z + t + 7u = 1, \\ 2x - y + z + 8t + 2u = -1. \end{cases}$

Задание 8

Решить систему уравнений матричным методом, по правилу Крамера и методом Гаусса

1. $\begin{cases} 5x + y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5x + 6z = 28, \\ x + 2z = 7. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x - 3y - 6z = 1, \\ 3x + y - 2z = -1, \\ x - 2y + z = 5. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ x - 3y + 2z = 5, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -16. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ 2x - y - 2z = 8. \end{cases}$

Задание 9

Найти собственное значение и собственный вектор матрицы

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -2 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 7. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} 12 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 17 \end{pmatrix}$;

9. $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; 10. $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 7 \\ -2 & 11 & 8 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 10

Найти ранг системы линейных однородных уравнений, общее решение, фундаментальную систему решений. Выразить общее решение через фундаментальную систему, если:

1. $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ x-y+z=0, \\ x+3y-z=0, \\ 3x+4y+3z=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+2y+3z-t=0, \\ x-y+z+2t=0, \\ x+5y+5z-4t=0, \\ x+8y+7z-7t=0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x+2y+z=0, \\ 2x+y+3z=0, \\ 5x+2y+3z=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-y-z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+3z=0, \\ 6x-y+8z=0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 3x-y+2z+5t=0, \\ 3x-3y+6z+15t=0, \\ x+3y-z=0, \\ 3x-y+3z+14t=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x+5y+4z+4t=0, \\ 2x+3y+2z+5t=0, \\ 7x-y+z-9t=0, \\ 2x+2y+3z+4t=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x+3y+5z+t=0, \\ 3x+5y+3z+t=0, \\ 3x+5y+z+3t=0, \\ 2y-2z=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x+3y+5z+t=0, \\ 3x+2y+5z+t=0, \\ 3x+5y+2z+t=0, \\ 3x+5y+z+2t=0. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x-2y+z+3t-u=0, \\ 2x+y+3z-t+2u=0, \\ 3x+4y+5z-5t+3u=0, \\ x+3y+2z-t+2u=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+3y+3z+2t+4u=0, \\ x+4y+5z+3t+7u=0, \\ 2x+5y+4z+t+5u=0. \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ удовлетворяют условию $\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=\bar{0}$. Найти $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1$.

2. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=5$, угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{b},\vec{c}$ равен 60°, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарны. Найти модуль вектора $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

3. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям $\vec{x}\cdot\vec{a}=9$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-4$, где $\vec{a}=(3;-1;5)$, $\vec{b}=(1;2;-3)$.

4. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5;3;4)$, $B(-1;-7;5)$, $C(6;-5;-3)$ и $D(2;5;-4)$ есть квадрат.

5. Доказать, что вектор $\vec{d}=\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$.

6. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{b}\cdot\vec{a}=28$.

7. Дано: $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=(2;1;2)$. Найти:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$;

в) $пр_{\bar{a}}\vec{b}$;

г) $пр_{\bar{b}}\vec{a}$

8. При каком значении λ векторы $\vec{b} = \lambda\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \lambda\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

9. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$. Найти:
а) длины сторон;
б) внутренние углы;
в) острый угол между медианой BD и стороной AC.

10. Доказать, что длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярны.

11. Векторы $\vec{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\vec{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$, $\vec{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$ образуют треугольник ABC; векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - взаимно перпендикулярные орты. Найти углы треугольника ABC.

12. Зная, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$, вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

13. Найти угол между биссектрисами углов Oxy и Oyz.

14. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны.

15. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеют равные длины и попарно образуют равные углы. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a} = (1;1;0)$, $\vec{b} = (0;1;-1)$.

16. Доказать, что точки $A(-3;-7;-5)$, $B(0;-1;-2)$ и $C(2;3;0)$ лежат на одной прямой, причем точка B расположена между точками A и C.

3.4.2. Векторное произведение векторов

Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется **упорядоченной**, если известно какой из них является первым, вторым и третьим.

Упорядоченная тройка векторов является **правой** (рис. 5), если после приведения их к общему началу кратчайший поворот от первого ко второму вектору из конца третьего вектора виден против часовой стрелки. Иначе, тройка векторов – **левая** (рис. 6).

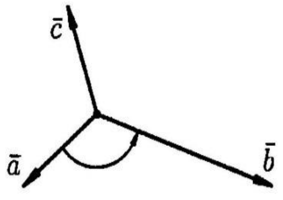


Рис.5

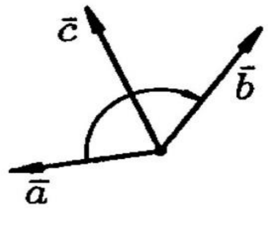


Рис. 6

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **вектор** $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, для которого выполнено:

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$
3. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ - правая тройка векторов.

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$

2. Сочетательное свойство $k\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\left(k\cdot\vec{a}\right),\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)\right]$

3. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

4. Распределительное свойство $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right),\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\right]\vec{c}$

Теорема

Пусть в ортонормированном базисе $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ даны векторы $\vec{a}\left(a_1,a_2,a_3\right)$ и $\vec{b}\left(b_1,b_2,b_3\right)$. Тогда их векторное произведение найдем по формуле:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

Или получим вектор с координатами

$$\left\{a_2b_3-a_3b_2;-\left(a_1b_3-a_3b_1\right);a_1b_2-a_2b_1\right\}$$

Доказательство:

Разложим данные векторы по базисным векторам, тогда получим:

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}$$

$$\vec{b}=b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}+b_3\cdot\vec{k}$$

Найдем векторное произведение данных векторов, получим:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\left(a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}\right)\left(b_1\cdot\vec{i}+b_2\cdot\vec{j}+b_3\cdot\vec{k}\right)\right]=$$

$$=a_1b_1\left[\vec{i},\vec{i}\right]+a_1b_2\left[\vec{i},\vec{j}\right]+a_1b_3\left[\vec{i},\vec{k}\right]+a_2b_1\left[\vec{j},\vec{i}\right]+a_2b_2\left[\vec{j},\vec{j}\right]+a_2b_3\left[\vec{j},\vec{k}\right]+$$

$$+a_3b_1\left[\vec{k},\vec{i}\right]+a_3b_2\left[\vec{k},\vec{j}\right]+a_3b_3\left[\vec{k},\vec{k}\right]$$

Так как

$$\left[\vec{i},\vec{j}\right]=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\sin 90^\circ=1=|\vec{k}|$$

$$\left[\vec{j},\vec{k}\right]=|\vec{j}|\cdot|\vec{k}|\cdot\sin 90^\circ=1=|\vec{i}|$$

$$\left[\vec{k},\vec{i}\right]=|\vec{k}|\cdot|\vec{i}|\cdot\sin 90^\circ=1=|\vec{j}|$$

Аналогично по свойствам имеем:

$$\left[\vec{j},\vec{i}\right]=-1=-|\vec{k}|$$

$$\left[\vec{k},\vec{j}\right]=-1=-|\vec{i}|$$

$$\left[\vec{i},\vec{k}\right]=-1=-|\vec{j}|$$

Тогда с учетом данных равенств имеем:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=a_1b_2|\vec{k}|-a_1b_3|\vec{j}|-a_2b_1|\vec{k}|+a_2b_3|\vec{i}|+a_3b_1|\vec{j}|-a_3b_2|\vec{i}|=$$

$$=\vec{i}\left(a_2b_3-a_3b_2\right)-\vec{j}\left(a_1b_3-a_3b_1\right)+\vec{k}(a_1b_2-a_2b_1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$; $\vec{b}$, как на сторонах равна $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$. (рис. 7) И, значит $S_\Delta=\frac{1}{2}\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|$

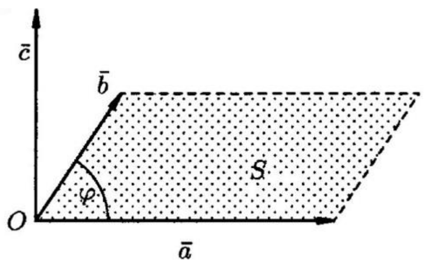


Рис. 7

Следствие 2

Если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0$ (и наоборот), т.е. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$

.

У коллинеарных векторов координаты пропорциональны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти координаты вектора $\vec{a}\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=\left(3;-1;-2\right)$, $\vec{b}=\left(1;2;-1\right)$.

2. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Найти: $\vec{c}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(2\vec{b}\right)$; $|\vec{c}|$.

3. Дано: $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2\vec{k}$, угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ равен 120°. Найти: $|\vec{a}\times\vec{b}|$; $\left|\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\times\left(-\vec{a}+3\vec{b}\right)\right|$.

4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

5. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{j}-7\vec{k}$

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(8;4;1)$ и $\vec{b}=(2;-2;1)$

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 45^o. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.

8. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=20$, $\vec{a}\,b=30$. Найти $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

9. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. Найти $\vec{a}\,\vec{b}$.

10. Найти единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}=(3;-1;2)$ и $\vec{b}=(-1;3;-1)$.

11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, где $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=3$, угол между векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$ равен 135°.

12. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;-2;3)$, $B(0;-1;2)$, $C(3;4;5)$.

13. Даны векторы $\vec{a}=(-4;-8;8)$, $\vec{b}=(4;3;2)$. Найти векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

14. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$. Найти произведения $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ и $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

15. Найти координаты вектора $\vec{x}$, перпендикулярного оси аппликат и вектору $\vec{a}=(8;-15;3)$. Вектор $\vec{x}$ образует острый угол с осью абсцисс; причем $|\vec{x}|=51$.

16. Найти длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{k}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

17. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=(2;-2;1)$ и $\vec{b}=(2;3;6)$.

18. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить произведение $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$.

2. Вычислить произведение $\vec{a}\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)$.

3. Какую тройку образуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

а) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(1;-4;0)$, $\vec{b}=(6;3;-2)$, $\vec{c}=(1;-2;2)$.

4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ взаимно перпендикулярны, образуют правую тройку. Найти $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, зная что $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$.

5. Даны векторы $\vec{a}=(3;5;-1)$, $\vec{b}=(0;-2;1)$ и $\vec{c}=(-2;2;3)$. Найти $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

6. Вычислить произведение $\vec{b}\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)$, если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=5$.

7. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ равен 30°, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$. Найти $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

8. Найти объем пирамиды с вершинами $A_1(0;0;1)$, $A_2(2;3;5)$, $A_3(6;2;3)$, $A_4(3;7;2)$.

9. Показать, что точки $A(5;7;2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

10. Даны вершины пирамиды $A(-5;-4;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$. Найти длину высоты, опущенной на грань BCD.

11. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;+3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси ординат.

12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\vec{AB}=(4;3;0)$, $\vec{AD}=(2;1;2)$ и $\vec{AA_1}=(-3;-2;5)$. Найти:

а) объем параллелепипеда;
б) площадь грани $ABCD$;

в) длину высоты, проведенной из вершины A_1;

г) угол между ребром AB и диагональю BD_1.

13. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$, $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;

б) площадь грани $A_1A_2A_3$;

в) угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3;

г) объем пирамиды;

д) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны точки $A_1(3;-4;1)$ и $A_2(4;6;-3)$. Найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$Найти его четвертую вершину D.

3. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

4. Разложить вектор $\vec{c} = (9;4)$ по векторам $\vec{a} = (1;2)$ и $\vec{b} = (2;-3)$.

5. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 3$ и углы между вектором и координатными осями равны: $\alpha = \beta = \gamma$.

6. Луч образует с двумя осями координат углы в 60^o. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

7. Даны векторы $\vec{a} = (2;3)$, $\vec{b} = (-1;3)$, $\vec{c} = (-1;3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$ коллинеарны?

8. Даны точки $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$, $D(5;-4;2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или в разные?

9. Представить вектор $\vec{d} = (4;12;-3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (5;7;0)$ и $\vec{c} = (3;-2;4)$.

10. На оси Oy найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

11. На оси Ox найти точку M, расстояние которой от точки $A(3;-3)$ равно 5.

12. Даны вершины треугольника $A(3;-1;5)$, $B(4;2;-5)$, $C(-4;0;3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

13. Найти сумму координат точки, лежащей на оси Ox, равноудаленной от точек $A(2;-4;5)$ и $B(-3;2;7)$.

Элементы аналитической геометрии в пространстве

1. Методические указания к решению

Задание 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4;-2;1)$ и $Q(2;4;-3)$.

Решение. Точка $O(0;0;0)$ – начало координат. Применяя уравнение (4) плоскости, проходящей через три данные точки O, P и Q, запишем

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 4-0 & -2-0 & 1-0 \\ 2-0 & 4-0 & -3-0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-6 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель по первой строке с использованием формулы (14), получаем уравнение искомой плоскости $x+7y+10z=0$.

Ответ: $x+7y+10z=0$.

Задание 2. Даны вершины тетраэдра $A(-2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$, $D(1;-4;6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро CD и середину ребра AB.

Решение. Обозначим через M середину ребра AB, тогда по формулам (1) ее координаты будут иметь вид:

$$M\left(\frac{-2-1}{2};\frac{0+7}{2};\frac{-4+1}{2}\right) \text{ или } M\left(-\frac{3}{2};\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

Уравнение искомой плоскости можно составить, используя уравнение (4) плоскости, проходящей через три данные точки D, C и M:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-6 \\ 4-1 & -8+4 & -4-6 \\ -\frac{3}{2}-1 & \frac{7}{2}+4 & -\frac{3}{2}-6 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z-6 \\ 3 & -4 & -10 \\ -\frac{5}{2} & \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель по первой строке с использованием формулы (14), получаем уравнение искомой плоскости $42x+19y+5z+4=0$.

Ответ: $42x+19y+5z+4=0$.

Задание 3. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1;-4;2)$ и $Q(7;1;-5)$.

Решение. Искомая плоскость проходит через точку O - середину отрезка PQ перпендикулярно этому отрезку, т.е. вектор $\overrightarrow{PQ}=(7-1;1+4;-5-2)=(6;5;-7)$ является для нее нормальным вектором.

Используя формулы середины отрезка (1), находим

$$O\left(\frac{1+7}{2};\frac{-4+1}{2};\frac{2-5}{2}\right) \text{ или } O\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

Применяя уравнение (3) плоскости, проходящей через данную точку O перпендикулярно данному вектору $\overrightarrow{PQ}$ можем записать:

$$6(x-4)+5\left(y+\frac{3}{2}\right)-7\left(z+\frac{3}{2}\right)=0 \text{ или } 6x+5y-7z-27=0.$$

Ответ: $6x+5y-7z-27=0$.

Задание 4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$ в точке $M(-1;3;0)$.

Решение. Из уравнения сферы определяем центр $C(3;1;-2)$. Вектор $\overrightarrow{CM}=(-1-3;3-1;0+2)=(-4;2;2)$ является нормальным для касательной плоскости. Тогда, используя уравнение (3) плоскости, проходящей через данную точку M перпендикулярно данному вектору $\overrightarrow{CM}$, уравнение искомой плоскости можем записать:

$$-4(x+1)+2(y-3)+2(z-0)=0 \text{ или } 2x-y-z+5=0.$$

Ответ: $2x-y-z+5=0$.

Задание 5. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $x-3y+2z+1=0$ и $2x-6y+4z+3=0$.

Решение. Выберем произвольным образом на первой плоскости точку $M(1;0;-1)$ (координаты точки должны удовлетворять уравнению плоскости $x-3y+2z+1=0$).

Вычислим расстояние от точки M до второй плоскости, используя формулу (7):

$$d=\frac{|2\cdot 1-6\cdot 0+4\cdot(-1)+3|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{56}}=\frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{14}}$.

Задание 6. Установить расположение плоскости $2x-2y-z+9=0$ относительно сферы $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

Решение. Из уравнения сферы определяем центр $C(1;1;1)$ и радиус $R=2$. Используя формулу (7), находим расстояние от точки C до данной плоскости:

$$d=\frac{|2\cdot 1-2\cdot 1-1+9|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

Так как $d>R$, то плоскость и сфера не имеют общих точек.

Ответ: не имеют общих точек.

Задание 7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x-y+7z-4=0$ и $5x+3y-5z+2=0$.

Решение. Пусть точка $M(x;y;z)$ принадлежит искомым плоскостям. Так как расстояния от этой точки до двух заданных плоскостей равны, то на основании формулы (7) можем записать:

$$\frac{|3x-y+7z-4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+7^2}}=\frac{|5x+3y-5z+2|}{\sqrt{5^2+3^2+(-5)^2}}$$

или

$$\frac{|3x-y+7z-4|}{\sqrt{59}}=\frac{|5x+3y-5z+2|}{\sqrt{59}}$$

или

$$|3x-y+7z-4|=|5x+3y-5z+2|.$$

Данное уравнение имеет два решения:

$$3x-y+7z-4=5x+3y-5z+2 \text{ или } 2x+4y-12z+6=0,$$

и

$$3x-y+7z-4=-(5x+3y-5z+2) \text{ или } 4x+y+z-1=0.$$

Ответ: $2x+4y-12z+6=0$ и $4x+y+z-1=0$.

Задание 8. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $6x-3y+2z-14=0$ и отстоящей от нее на расстоянии, равном 3.

Решение. Пусть π - плоскость из условия задачи, α - искомая плоскость, точка $M(x;y;z)$ – произвольная точка плоскости α. По формуле (7) расстояние от точки M до плоскости π можно записать в виде:

$$d=\frac{|6x-3y+2z-14|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{|6x-3y+2z-14|}{7}.$$

С другой стороны, по условию задачи $d=3$. Получаем уравнение

$$\frac{|6x-3y+2z-14|}{7}=3, \text{ или } |6x-3y+2z-14|=21.$$

Это уравнение имеет два решения:

$$6x-3y+2z-14=21 \text{ или } 6x-3y+2z-35=0\ (\alpha_1)$$
и
$$6x-3y+2z-14=-21 \text{ или } 6x-3y+2z+7=0\ (\alpha_2).$$

Т.е. существует две плоскости, параллельных π и отстоящих от нее на расстоянии, равном 3.

Ответ: $6x-3y+2z-35=0$ и $6x-3y+2z+7=0$.

Задание 9. Найти угол между плоскостями $2x-6y+14z-1=0$ и $5x-15y+35z-3=0$.

Решение. Обозначим через φ искомый угол, тогда по формуле (6) находим
$$\cos\varphi=\frac{|2\cdot5+(-6)\cdot(-15)+14\cdot35|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+14^2}\cdot\sqrt{5^2+(-15)^2+35^2}}=\frac{590}{590}=1, \text{ откуда } \varphi=0.$$

Ответ: 0.

Задание 10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5;-1;-3)$ параллельно прямой l: $\begin{cases}2x+3y+z-6=0,\\4x-5y-z+2=0.\end{cases}$

Решение. Направляющий вектор $\vec{l}$ прямой l согласно формулам (12) имеет координаты:
$$\vec{l}=\left(\begin{vmatrix}3&1\\-5&-1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2&1\\4&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&3\\4&-5\end{vmatrix}\right)=(2;6;-22).$$

Так как искомая прямая проходит параллельно прямой l, то ее направляющим вектором будет также вектор $\vec{l}$. Используя формулу (8), запишем канонические уравнения искомой прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{l}$:
$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+3}{-22} \text{ или } \frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}.$$

Ответ: $\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}$.

Задание 11. Найти точку пересечения и угол между прямой
$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ и плоскостью $3x-y+2z+5=0$.

Решение. Введем обозначения: π – заданная плоскость, l - заданная прямая, O – точка пересечения прямой и плоскости, т.е. $\{O\}=\pi\cap l$, φ - угол между прямой и плоскостью.

1. Находим точку пересечения прямой и плоскости, для чего составляем и решаем систему:
$$\begin{cases}3x-y+2z+5=0\\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}\end{cases}.$$

Заменим в системе канонические уравнения прямой l на параметрические:
$$\begin{cases}3x-y+2z+5=0\\ x=2t+1\\ y=t-2\\ z=t+2\end{cases}.$$

Подставляя в первое уравнение системы x, y, z из последних трех уравнений, получаем
$$3(2t+1)-(t-2)+2(t+2)+5=0,$$
или $7t+14=0$, откуда $t=-2$, это и есть значение параметра t, соответствующего точке O. Следовательно, ее координаты будут равны:
$$x=2\cdot(-2)+1=-3,\ y=-2-2=-4,\ z=-2+2=0.$$

2. Находим угол между прямой и плоскостью. Из данных в условии задачи уравнений определяем нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости π и направляющий вектор $\vec{l}$ прямой l: $\vec{n}=(3;-1;2)$, $\vec{l}=(2;1;1)$. Применяя формулу (13) приложения, находим
$$\sin\varphi=\frac{|3\cdot2+(-1)\cdot1+2\cdot1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{7}{2\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{6},$$
$$\text{откуда } \varphi=arcsin\frac{\sqrt{21}}{6}$$

Ответ: $O(-3;-4;0)$, $\varphi = arcsin\frac{\sqrt{21}}{6}$.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(6;-1;5)$, $M_2(-1;2;7)$, $M_3(4;0;3)$.
2. Даны вершины $A(0;1;0)$, $B(-1;0;3)$, $C(5;0;0)$ и $B_1(2;0;1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро C_1C и диагональ A_1C_1.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(3;-2;4)$ параллельно плоскости $x-5y+3z-2=0$.
4. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от концов отрезка AB, где $A(7;-1;\ -2), B(-3;1;3)$.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $3x+5y-z+11=0$ и $3x+5y-z-5=0$.
6. Установить расположение плоскости $x-2y+z-5=0$ относительно сферы $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=5$.
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x-2y+3z-5=0$ и $2x+3y-3z+1=0$.
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x-y+2z-4=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 5.
9. Найти угол между плоскостями $x-3y+5=0$ и $2x-y+5z-16=0$.
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x+5y-z-3=0, \\ x+y-z-4=0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ и плоскостью $x+2y+3z-14=0$.

Вариант 2

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P(1;0;0)$, $Q(1;3;0)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;-2;1)$.
2. Даны вершины тетраэдра $A(4;0;3)$, $B(-2;1;5)$, $C(7;1;2)$, $D(0;4;1)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(-1;2;0)$ перпендикулярно вектору $\vec{p}=(3;4;5)$.
4. Написать уравнение плоскости, которая касается сферы $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=3$ в точке $M_0(3;-2;6)$.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $2x-11y+10z-13=0$ и $2x-11y+10z+6=0$.
6. Установить расположение плоскости $6x-3y+2z+49=0$ относительно сферы $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=15$.
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x-2y+7z-16=0$ и $7x+y-2z-3=0$.
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами $S(0;1;3)$, $A(-3;5;1)$, $B(-2;1;5)$, $C(1;1;-4)$, опущенную из вершины S на основание ABC.
9. Найти угол между плоскостями $x-3y+z-1=0$ и $x+z-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;0;4)$ параллельно прямой l: $\begin{cases} x+3y-4z-1=0, \\ 4x-y+3z+2=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$ и плоскостью $x+2y-5z+20=0$.

Вариант 3

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 1;-2)$, $B(1;-3;-2)$ и $C(11;0;7)$.

2. Даны вершины $A(5;2;0)$, $B(0;1;1)$, $C(-2;1;7)$ и $A_1(3;1;2)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро C_1C параллельно диагонали BD.

3. Точка $P(3;2;1)$ – основание высоты четырехугольной пирамиды, опущенной из вершины $S(5;-3;2)$ на основание. Написать уравнение плоскости, содержащей основание пирамиды.

4. Написать уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2=34$ в точке $L(-3;4;3)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x+2y-z+5=0$ и $x+2y-z-7=0$.

6. Установить расположение плоскости $x+6y+5z-25=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=2$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $7x-y-3z+4=0$ и $3x+5y-5z-4=0$.

8. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $M(3;1;2)$ и плоскости $3x-y+5z-11=0$.

9. Найти угол между плоскостями $4x-5y+3z-1=0$ и $x-4y-z+9=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(0;1;-3)$ параллельно прямой l: $\begin{cases} 4x-3y+5z-1=0, \\ x-y-2z=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$ и плоскостью $x-3y+7z-24=0$.

Вариант 4

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $M_1(7;\ 0;5), M_2(0;11;2)$.

2. Даны вершины тетраэдра $A(2;-7;0)$, $B(3;5;6)$, $C(4;1;3)$, $D(-2;-5;3)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и середину ребра CD.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(2;-2;5)$ параллельно плоскости $x-5y+3z-16=0$.

4. Написать уравнение плоскости, которая касается сферы $(x-1)^2+(y+5)^2+(z-6)^2=14$ в точке $P(3;-2;5)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x+y-z-4=0$ и $x+y-z+5=0$.

6. Установить расположение плоскости $x+3y-z+7=0$ относительно сферы $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=6$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $5x-y+3z+6=0$ и $x+3y-5z-2=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $10x + 2y - 11z - 5 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 7.

9. Найти угол между плоскостями
$3x - y + 2z + 15 = 0$ и $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2; 1; 5)$ параллельно прямой $l\colon \begin{cases} x + y + z - 11 = 0, \\ 9x - 2y + z - 5 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$ и плоскостью $2x - y + 4z = 0$.

Вариант 5

1. Можно ли провести плоскость через точки $K(3; 1; 5)$, $M(0; 0; -2)$, $L(1; -4; 0)$, $P(-6; 3; 1)$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Даны вершины $A(3; 4; 5)$, $B(3; -5; 0)$, $C(0; 1; 4)$ и $D_1(6; 0; -7)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Составить уравнение плоскости, содержащей грань AA_1D_1D.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через основание $P(3; -7; 0)$ перпендикуляра, проведенного через начало координат к этой плоскости.

4. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 18$ в точке $C(-3; 2; 5)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $2x - y + 3z - 1 = 0$ и
$2x - y + 3z + 3 = 0$.

6. Установить расположение плоскости $3x - y + z - 2 = 0$ относительно сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - 4y + z - 1 = 0$ и $4x + 3y - z + 4 = 0$.

8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами $S(1; 1; 1)$, $A(0; 0; 2)$, $B(0; 1; 0)$, $C(3; 0; 1)$, опущенную из вершины S на основание ABC.

9. Найти угол между плоскостями
$6x + 2y - 4z + 17 = 0$ и $9x + 3y - 6z - 4 = 0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 0; -1)$ параллельно прямой $l\colon \begin{cases} x + 7y - 2z + 5 = 0, \\ 2x - y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$ и плоскостью $3x + y - 5z - 12 = 0$.

Вариант 6

1. Можно ли провести плоскость через точки $K(7; -3; 6)$, $M(1; 8; -3)$, $L(4; 5; 0)$, $P(5; 3; 2)$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Даны вершины тетраэдра $A(-2; 1; 5)$, $B(0; 4; 1)$, $C(2; 1; 7)$, $D(4; 0; -3)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро BC и середину ребра AD.

3. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от концов отрезка PQ, где $P(7; 5; 2)$, $Q(-1; 3; 4)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(7; -2; -6)$ перпендикулярно вектору $\vec{p} = (11; 4; 2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x + y + 3z - 5 = 0$ и
$x + y + 3z + 4 = 0$.

6. Установить расположение плоскости $x-2y+z-1=0$ относительно сферы $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=6$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+2y-3z+1=0$ и $3x-y+2z-1=0$.

8. Вычислить высоту тетраэдра с вершинами $A(0;1;0)$, $B(-1;0;3)$, $C(2;0;-1)$, $D(1;1;-1)$, опущенную из вершины A на грань BCD.

9. Найти угол между плоскостями $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ и $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;3;0)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} x-y-7z+1=0, \\ 5x-5y-z=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и плоскостью $x+3y-5z+9=0$.

Вариант 7

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;0;0)$, $K(0;-2;3)$ и $L(6;0;1)$.

2. Даны вершины $A(0;1;0)$, $B(-1;0;3)$, $C(7;0;0)$ и $A_1(2;0;-1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, проходящей через диагональ BD и середину ребра AA_1.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-7;0)$ параллельно плоскости $3x-2y+6z-17=0$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка MN перпендикулярно ему, если $M(5;0;\ 4)$, $N(-3;6;2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $3x+y-2z+4=0$ и $3x+y-2z-1=0$.

6. Установить расположение плоскости $x-2y+3z+5=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=11$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+2y+z=0$ и $2x-y+z+3=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x-y+5z-1=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{27}$.

9. Найти угол между плоскостями $3y-z=0$ и $2y+z=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;-3;-1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 3x-y+z-8=0, \\ 5x+y-4z+2=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и плоскостью $x-2y+5z+17=0$.

Вариант 8

1. Можно ли провести плоскость через точки $A(2;1;-1)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;4;-2)$, $D(3;1;-2)$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;0;0)$, $M_2(1;2;3)$ и $M_3(0;3;6)$.

3. Точка $P(2;-1;1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

4. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8$ в точке $M_0(2;1;-3)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x+y+z+1=0$ и $x+y+z-2=0$.

6. Установить расположение плоскости $x-y+z-3=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=4$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+y-3z+2=0$ и $3x-y+z-1=0$.

8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами $S(0;0;0)$, $A(1;-1;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(0;0;-3)$, опущенную из вершины S на основание ABC.

9. Найти угол между плоскостями
$6x+3y-2z=0$ и $x+2y+6z-12=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-1;2)$ параллельно прямой $l\colon \begin{cases} x+2y+z=0, \\ 2x-y+z+3=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$ и плоскостью $x-2y+4z-19=0$.

Вариант 9

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;3;1)$, $K(3;1;4)$, $L(-2;1;5)$.

2. Даны вершины тетраэдра $A(-2;1;0)$, $B(1;-3;-5)$, $C(6;-3;4)$, $D(0;-7;8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и середину ребра CD.

3. Составить уравнение плоскости, зная, что точка $M(2;5;-4)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

4. Написать уравнение плоскости, которая касается сферы
$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=35$ в точке $A(2;-1;2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x-3y+z-5=0$ и
$x-3y+z+1=0$.

6. Установить расположение плоскости $x+2y-z+1=0$ относительно сферы $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=8$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $2x-3y-z-5=0$ и $3x+y-2z+1=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x-2y+z-5=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{6}$.

9. Найти угол между плоскостями
$x+2y+2z-3=0$ и $16x+12y-15z-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;3;6)$ параллельно прямой $l\colon \begin{cases} x-2y-3z+1=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и плоскостью $2x-y+3z+23=0$.

Вариант 10

1. Проверить, можно ли провести плоскость через точки $M_1(3;1;0)$, $M_2(0;7;2)$, $M_3(-1;0;-5)$, $M_4(4;1;5)$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $K(2;-1;3)$, $M(3;1;2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;-1;4)$.

3. Точка $K(2;3;1)$ - основание перпендикуляра MK, опущенного из точки $M(-1;4;5)$ на плоскость. Написать уравнение этой плоскости.

4. Точка $B(3;2;0)$ принадлежит сфере $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=21$. Написать уравнение плоскости, касающейся сферы в этой точке.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x-5y+z-2=0$ и $x-5y+z+3=0$.

6. Установить расположение плоскости $x+y+z-3=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=5$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+y-3z+3=0$ и $3x-y+z-2=0$.

8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами $S(1;1;1)$, $A(0;0;3)$, $B(-1;0;2)$, $C(0;0;0)$, опущенную из вершины S на основание ABC.

9. Найти угол между плоскостями $2x-y+5z+16=0$ и $x+2y+3z+8=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5;0;-2)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x-3y+z+4=0, \\ 5x-2y-4z=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и плоскостью $2x-3y-5z-7=0$.

Вариант 11

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $M_1(2;1;1)$ и $M_2(-3;0;4)$.

2. Даны вершины тетраэдра $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(7;0;6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через основание $M_0(3;6;4)$ перпендикуляра, проведенного из начала координат.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;4;5)$ параллельно плоскости $2x-y+3z-5=0$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x-2y+3z-4=0$ и $x-2y+3z+5=0$.

6. Установить расположение плоскости $x+y-z+15=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=3$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x-3y+2z-4=0$ и $2x+y-3z+1=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $5x-y+3z-1=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{35}$.

9. Найти угол между плоскостями $2x+2y+z-1=0$ и $x+z-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(11;3;-1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 3x-2y+3z-5=0, \\ 2x-3y-3z+1=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и плоскостью $4x+2y-z-11=0$.

Вариант 12

1. Можно ли провести плоскость через точки $A(6;1;0)$, $B(3;0;4)$, $C(5;2;7)$, $D(2;1;2)$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Даны вершины тетраэдра $A(2;1;0)$, $B(1;3;5)$, $C(6;3;4)$, $D(0;-7;8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AC параллельно ребру BD.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему, если $A(0;-1;2)$ и $B(2;-1;3)$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=49$ в точке $M(-6;3;-2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $7x-3y+z+4=0$ и $7x-3y+z-5=0$.

6. Установить расположение плоскости $x-y+3z-1=0$ относительно сферы $x^2+(y-1)^2+z^2=5$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $5x+y-z+3=0$ и $x+y+5z-1=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x+3y-z+2=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{14}$.

9. Найти угол между плоскостями $3x+y+z-4=0$ и $y+z+5=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(7;-1;2)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} x-5y+6z-6=0, \\ 5x-y-4=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и плоскостью $3x-2y-4z-8=0$.

Вариант 13

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;3;-1)$, $K(5;2;0)$ параллельно отрезку AB, где $A(3;6;1)$, $B(1;-1;0)$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $K(-1;3;1)$ параллельно плоскости Oyz.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;0;4)$ параллельно плоскости $3x-2y+5z-3=0$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=6$ в точке $M(1;-3;2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x-11y+3z+5=0$ и $x-11y+3z-2=0$.

6. Установить расположение плоскости $2x+y-2z+15=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=5$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+5y-2z+3=0$ и $2x-y+5z-2=0$.

8. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из точки $Q(3;-1;0)$ на плоскость $5x+y-4z+2=0$.

9. Найти угол между плоскостями $3x-2y-2z-16=0$ и $x+y-3z-7=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(0;0;1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} x+2y-z+3=0, \\ 3x-y+2z-1=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и плоскостью $x+2y-z-2=0$.

Вариант 14

1. Можно ли провести плоскость через точки $M(6;1;0)$, $N(3;0;4)$, $P(5;2;7)$, $Q(2;-1;\frac{10}{4})$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.

2. Даны вершины $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;-1;3)$ и $A_1(3;-1;5)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, содержащей грань BB_1C_1C.

3. Даны вершины тетраэдра $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(3;0;6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через середину ребра AB перпендикулярно ему.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(3;-4;5)$ параллельно плоскости $x-2y-3z+5=0$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $3x-5y+z-6=0$ и $3x-5y+z+3=0$.

6. Установить расположение плоскости $3x-2y+z-8=0$ относительно сферы $(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=4$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x-y-7z+1=0$ и $5x+5y-z-3=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x-2y-2z+3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 2.

9. Найти угол между плоскостями $2x+2y+z+9=0$ и $x-y+3z-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-2;1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x-3y-3z=0, \\ 3x-2y+3z-5=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$ и плоскостью $5x-y+4z+3=0$.

Вариант 15

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-5;1)$, $M_2(3;4;-2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2;-1;3)$.

2. Даны вершины $A(7;1;6)$, $B(0;2;7)$, $C(0;1;5)$ и $A_1(-3;7;1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, содержащей грань AA_1D_1D.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через основание $K(5;-1;3)$ перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

4. Составить уравнение плоскости, касательной к сфере $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=20$ в точке $P(-3;-1;2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $2x-y-3z+1=0$ и $2x-y-3z-4=0$.

6. Установить расположение плоскости $x+2y-z+5=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $7x-2y+z-3=0$ и $x+7y-2z+5=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $3x+y-5z+4=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{35}$.

9. Найти угол между плоскостями $x+2y+2z-3=0$ и $2x-y+2z+5=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;0;1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 5x-y-4=0, \\ x-5y+6z=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и плоскостью $x+3y+5z-42=0$.

Вариант 16

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(11;-2;3)$, $K(1;4;-3)$, $L(1;0;-1)$.
2. Даны вершины тетраэдра $A(5;1;3)$, $B(2;1;-6)$, $C(-5;0;4)$, $D(3;0;-6)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину ребра CD параллельно грани ABD.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2;-1;3)$ параллельно плоскости $2x-3y+5z+2=0$.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через основание $B(3;-2;5)$ перпендикуляра, проведенного из точки $A(2;1;-7)$ к этой плоскости.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $7x+y+z-1=0$ и $7x+y+z+5=0$.
6. Установить расположение плоскости $11x-3y+5z-1=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=5$.
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x-5y+z-4=0$ и $5x+y+3z+2=0$.
8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами $S(3;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(-1;-1;-2)$, опущенную из вершины S на основание ABC.
9. Найти угол между плоскостями $3x+2y-3z-1=0$ и $x+y+z-7=0$.
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3;0;1)$ параллельно прямой $l:\begin{cases}3x-y+2z-1=0,\\ x+2y-z+3=0.\end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и плоскостью $7x+y+4z-47=0$.

Вариант 17

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P(3;4;-2)$, $Q(-1;0;1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2;-1;0)$.
2. Даны вершины тетраэдра $A(3;-1;5)$, $B(1;1;0)$, $C(2;-1;5)$, $D(-7;3;0)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей перпендикулярно отрезку PQ через его середину, если $P(11;-2;3)$, $Q(-1;4;3)$.
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=50$ в точке $M(4;-3;5)$.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $x-9y+z-5=0$ и $x-9y+z+2=0$.
6. Установить расположение плоскости $9x-2y+z-5=0$ относительно сферы $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=8$.
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $4x-3y+5z-1=0$ и $5x+3y-4z+2=0$.
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $5x-y+z-8=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{27}$.
9. Найти угол между плоскостями $x-3y-2z-8=0$ и $x+y-z+3=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(5;2;-1)$ параллельно прямой $l\colon \begin{cases} 5x-2y-4z=0, \\ 2x-3y+z+4=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$ и плоскостью $2x+3y+7z-52=0$.

Вариант 18

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P(1;0;-1)$, $Q(0;1;3)$, $L(1;-2;3)$.
2. Даны вершины $A(4;0;1)$, $B(0;5;3)$, $C(4;-1;3)$ и $C_1(5;-1;3)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, содержащей грань AA_1B_1B.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;3;-4)$ параллельно плоскости $2x-y+5z-1=0$.
4. Точка $Q(1;2;-5)$ – основание высоты правильной четырехугольной пирамиды, опущенной из вершины $S(3;4;-1)$ на основание. Написать уравнение плоскости, содержащей основание пирамиды.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $3x+8y-z+1=0$ и $3x+8y-z+3=0$.
6. Установить расположение плоскости $x+y+z-11=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=2$.
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $4x-y+3z-1=0$ и $x+3y-4z+5=0$.
8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x-2y-2z+3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 7.
9. Найти угол между плоскостями $3x-2y+3z+23=0$ и $y+z+5=0$.
10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2;0;1)$ параллельно прямой $l\colon \begin{cases} 3x-y+2z-1=0, \\ x-2y-3z+1=0. \end{cases}$
11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ и плоскостью $3x+4y+7z-16=0$.

Вариант 19

1. Можно ли провести плоскость через точки $P(3;1;0)$, $R(0;0;-1)$, $Q(4;1;2)$, $L(2;1;-2)$? В случае утвердительного ответа написать уравнение этой плоскости.
2. Даны вершины тетраэдра $A(3;1;0)$, $B(-1;5;2)$, $C(4;0;1)$, $D(-2;3;1)$. Написать уравнение плоскости, содержащей грань ABD.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(3;-5;0)$, перпендикулярно вектору $\vec{a}=(-3;6;4)$.
4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-1)^2=38$ в точке $M(0;1;3)$.
5. Вычислить расстояние между плоскостями $7x-4y+3z-3=0$ и $7x-4y+3z+2=0$.
6. Установить расположение плоскости $x-2y+2z-1=0$ относительно сферы $(x-5)^2+(y+2)^2+z^2=6$.
7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $8x-3y+5z-1=0$ и $5x+8y-3z+1=0$.

8. Вычислить высоту тетраэдра с вершинами $A(1;0;3)$, $B(-1;2;3)$, $C(0;0;3)$, $D(1;0;0)$, опущенную из вершины B на грань ACD.

9. Найти угол между плоскостями $x+y+3z-7=0$ и $y+z-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;-3;0)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 2x-y+z+3=0, \\ x+2y+z=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и плоскостью $2x-5y+4z+24=0$.

Вариант 20

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $C(3;-4;1)$, $B(-2;1;3)$ параллельно вектору $\vec{p}=(5;0;-1)$.

2. Даны вершины $A(2;-5;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(1;0;0)$ и $D_1(3;0;1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, содержащей грань $A_1B_1C_1D_1$.

3. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от концов отрезка BC, если $B(5;-2;1)$, $C(-1;3;4)$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=14$ в точке $P(3;-1;2)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x+y+z+7=0$ и $x+y+z-3=0$.

6. Установить расположение плоскости $8x-y+7z-3=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=5$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $5x-6y+z-2=0$ и $6x+y-5z+3=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x-y-z-3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{3}$.

9. Найти угол между плоскостями $x-2y+2z+17=0$ и $x-2y-1=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;-3;1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} x+y-z-4=0, \\ 2x+5y-z-3=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и плоскостью $x-2y-3z+18=0$.

Вариант 21

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $P(1;0;0)$, $Q(0;-1;0)$, $L(2;0;1)$.

2. Даны вершины тетраэдра $A(3;1;2)$, $B(4;1;5)$, $C(8;0;1)$, $D(1;7;2)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через ребро AD параллельно ребру BC.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;3;5)$ параллельно плоскости $3x-2y+z+8=0$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=46$ в точке $M(6;-1;3)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x+6y-5z-1=0$ и $x+6y-5z+3=0$.

6. Установить расположение плоскости $3x-11y+z-10=0$ относительно сферы $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=35$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x - 7y + 3z - 2 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 4 = 0$.

8. Вычислить высоту тетраэдра с вершинами $A(3;1;5)$, $B(1;0;6)$, $C(5;0;4)$, $D(0;1;2)$, опущенную из вершины D на грань ABC.

9. Найти угол между плоскостями $x + 2y - 1 = 0$ и $x + y + 6 = 0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3;-1;-2)$ параллельно прямой l: $\begin{cases} 5x - 5y - z - 3 = 0, \\ x - y - 7z + 1 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$ и плоскостью $x + 7y + 3z + 11 = 0$.

Вариант 22

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;-3;2)$, $N(-4;0;1)$ параллельно вектору $\vec{p} = (3;5;0)$.

2. Даны вершины $A(4;0;1)$, $B(0;5;3)$, $C(4;-1;3)$ и $C_1(5;-1;3)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AA_1 и диагональ A_1C.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка AB перпендикулярно ему, если $A(1;0;7)$, $B(3;4;-1)$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере
$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 29$ в точке $E(3;1;5)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $2x - 3y + z - 16 = 0$ и
$2x - 3y + z - 3 = 0$.

6. Установить расположение плоскости $4x - 3y + 5z - 25 = 0$ относительно сферы $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 15$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $2x - 5y - z - 1 = 0$ и $5x + y + 2z + 3 = 0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - 3y + z + 11 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{14}$.

9. Найти угол между плоскостями $2x - z + 5 = 0$ и $2x + 3y - 7 = 0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(6;-1;3)$ параллельно прямой l: $\begin{cases} 2x - y - 3z + 1 = 0, \\ x + 7y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}$ и плоскостью $3x + 7y - 5z - 11 = 0$.

Вариант 23

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2;0;3)$, $N(0;0;5)$ параллельно вектору $\vec{p} = (-3;1;0)$.

2. Даны вершины $A(1;1;1)$, $B(0;-2;1)$, $C(3;-5;1)$ и $C_1(0;-6;0)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение диагональной плоскости BB_1D_1D.

3. Составить уравнение плоскости, параллельно плоскости $x - 7y - 4z + 9 = 0$ и проходящей через точку $K(3;1;5)$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=21$ в точке $S(1;-2;4)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $2x-3y+5z-11=0$ и $2x-3y+5z+6=0$.

6. Установить расположение плоскости $9x+y-10z-29=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=35$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x+6y-4z+13=0$ и $4x-3y-6z-11=0$.

8. Вычислить высоту пирамиды с вершинами $S(1;5;-2)$, $A(-1;0;3)$, $B(1;3;0)$, $C(0;5;0)$, опущенную из вершины S на основание ABC.

9. Найти угол между плоскостями $5x+3y+z-18=0$ и $2y+z-9=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-5;0;2)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} 9x-2y+z-17=0, \\ x+y+z-11=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$ и плоскостью $4x+y-6z-5=0$.

Вариант 24

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(0;0;-7)$, $N(-1;0;1)$, $P(4;1;5)$.

2. Даны вершины $A(-3;1;0)$, $B(4;0;5)$, $C(2;1;3)$ и $A_1(3;1;1)$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро CC_1 параллельно диагонали BD.

3. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от концов отрезка CD, если $C(-3;4;5)$, $D(-7;2;3)$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $x^2+y^2+z^2=35$ в точке $K(3;-1;5)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $3x-5y+z-3=0$ и $3x-5y+z+2=0$.

6. Установить расположение плоскости $2x+y-z+3=0$ относительно сферы $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=21$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+7y-5z+1=0$ и $5x-y-7z+8=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $5x+7y-z+6=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $5\sqrt{3}$.

9. Найти угол между плоскостями $4x+3z-2=0$ и $x+2y+2z+5=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-11;1)$ параллельно прямой $l: \begin{cases} x-y-2z=0, \\ 4x-3y+5z-1=0. \end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$ и плоскостью $5x+9y+4z-25=0$.

Вариант 25

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $K(3;1;2)$, $L(0;1;-2)$ параллельно вектору $\vec{a}=(3;0;5)$.

2. Даны вершины тетраэдра $A(1;3;0)$, $B(6;-1;5)$, $C(-1;0;8)$, $D(1;5;-2)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро CD параллельно ребру AB.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;7;4)$ параллельно плоскости $2x-3y+z-16=0$.

4. Написать уравнение плоскости, касательной к сфере $(x+5)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=12$ в точке $A(-3;4;5)$.

5. Вычислить расстояние между плоскостями $x-3y+5z-8=0$ и $x-3y+5z+2=0$.

6. Установить расположение плоскости $11x-y+3z-4=0$ относительно сферы $x^2+y^2+z^2=3$.

7. Найти уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $x+6y+z-3=0$ и $6x-y-z+5=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $3x-2y+5z-3=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном $\sqrt{38}$.

9. Найти угол между плоскостями $x+4y-z+1=0$ и $2x+y+4z-3=0$.

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;1;-7)$ параллельно прямой l: $\begin{cases}4x-y+3z+2=0,\\ x+3y-4z-1=0.\end{cases}$

11. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$ и плоскостью $x+4y+13z-23=0$.

Приложение

✓ Формулы середины отрезка:
если $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ и O – середина отрезка AB, то

$$O\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right) \quad (1)$$

✓ Общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (2)$$

✓ Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}=(A;B;C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (3)$$

✓ Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad (4)$$

✓ Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно двум данным неколлинеарным векторам $\vec{l}=(l_1;l_2;l_3)$, $\vec{m}=(m_1;m_2;m_3)$ (каноническое уравнение плоскости):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix}=0 \quad (5)$$

✓ Угол между двумя плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (6)$$

✓ Расстояние от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (7)$$

✓ Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно данному вектору $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$ (канонические уравнения прямой):

$$\frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{l_2} = \frac{z-z_0}{l_3} \qquad (8)$$

✓ Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно данному вектору $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$ (параметрические уравнения прямой):

$$\begin{cases} x = l_1t + x_0 \\ y = l_2t + y_0 \\ z = l_3t + z_0 \end{cases} \qquad (9)$$

✓ Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_3-z_1} \qquad (10)$$

✓ Общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\text{'} \end{cases} \qquad (11)$$

в этом случае координаты направляющего вектора $\vec{l}$ прямой имеют вид:

$$\vec{l} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

или

$$\vec{l} = (B_1C_2 - C_1B_2; -(A_1C_2 - C_1A_2); A_1B_2 - B_1A_2) \qquad (12)$$

✓ Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{|Al_1+Bl_2+Cl_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}} \qquad (13)$$

✓ Формула раскрытия определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \qquad (14)$$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математика» для всех направлений подготовки и форм обучения

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

При объяснении студентам теоретического вопроса, необходимо доступно изложить определение предела на примере числовой последовательности. Обязательным является повторение различных способов преобразования алгебраических дробей для упрощения выражений. Вспомнить такие способы, как вынесение общего множителя за скобку, приведение дроби к общему знаменателю, разложение квадратного трехчлена на множители, умножение на сопряженное значение. Необходимо уделить большое внимание повторению формул сокращенного умножения. Важно предоставить студентам возможность овладеть способами преобразования выражений для решения пределов сложных функций, прежде чем перейти к изучению «первого» и «второго замечательного пределов». Устный счет является обязательной составляющей каждого занятия, так как приучает к рационализации вычислений и аналитической оценке результатов, что имеет значение для более рационального вычисления не только пределов, но и других поставленных задач математического анализа. При закреплении материала, совершенствовании знаний, умений и навыков целесообразно практиковать самостоятельную работу студентов. Домашние задания в разумных пределах являются обязательными для более успешного освоения материала.

2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательностью $\{x_n\}$ называется пронумерованное бесконечное множество чисел: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Обычно числовую последовательность задают формулой

$$a_n = f(n).$$

Пример 3.1

Формула $a_n = 2n-1$ числам натурального ряда $1,2,3,4,5...$ ставит в соответствие последовательность нечетных чисел $1,3,5,7,9$.

Пример 3.2

Формула $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ задает возрастающую последовательность правильных дробей $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, \dots$

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) существует такое положительное число N, что абсолютная величина разности $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x = a$

Замечание 3.1 В пределе последовательности «динамическая» n может стремиться только к «плюс бесконечности».

Замечание 3.2 Последовательность «дискретна» (прерывна), то есть состоит из отдельных изолированных членов.

Замечание 3.3 В пределах последовательностей часто встречаются факториалы (свернутая запись произведения) и прогрессии.

Пример 3.3

Найдите пределы последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{4n^3+3n+1}{3+2n^2+5n^3}$

б) $x_n = \dfrac{\sqrt{3n^3+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

в) $x_n = \dfrac{1+2+...+n}{3+2n^3}$

Решение

Принцип решения: в числителе и знаменателе выносятся члены со старшей степенью *n*, которые потом сокращаются. $a)\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+3n+1}{3+2n^2+5n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 \cdot \left(4+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{2}{n}+5\right)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{2}{n}+5} = \frac{4+0+0}{0+0+5} = \frac{4}{5}.$$

$$б)\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3n^3+n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\left(\dfrac{\sqrt{3n^3+n}}{\sqrt{n^3}}+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}\right)}{\sqrt{n^3}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^3}}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{3n^3+n}{n^3}}+\sqrt{\dfrac{n}{n^3}}}{\sqrt{\dfrac{n^3+1}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}} = \frac{\sqrt{3+0}+\sqrt{0}}{\sqrt{1+0}} = \sqrt{3}.$$

$$в)\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2...+n}{3+2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{1+n}{2}\right)\cdot n}{3+2n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2}{2\cdot\left(3+2n^3\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(\dfrac{1}{n}+1\right)}{n^3\cdot\left(\dfrac{3}{n^3}+2\right)} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n^3}+2\right)} = \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\frac{0+1}{0+2} = 0.$$

3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Число *А* называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного числа ε существует число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для любых $x \in X$ и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство (определение на языке «$\varepsilon - \delta$»).

Это записывается следующим образом: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Правила вычисления пределов функций

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c,$ где $c-const$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x),$ то справедливы равенства:

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x),$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x),$ в частности $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot g(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x),$

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0,$

5. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Случаи, которые могут встретиться при вычислении пределов

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

Таблица 2

Вычисление предела суммы $f(x)+g(x)$	**Вычисление предела произведения** $f(x)\cdot g(x)$
1. $A,B-$ конечные числа $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=A+B.$ 2. $A=+\infty;\ B=+\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=[+\infty+\infty]=+\infty.$ 3. $A=-\infty;\ B=-\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=[-\infty-\infty]=-\infty.$ 4. $A=\infty, B-$ конечное число $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=[\infty+B]=\infty.$ 5. $A=+\infty;\ B=-\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=[+\infty-\infty].$	1. $A,B-$ конечные числа, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=A\cdot B.$ 2. $A\neq 0;\ B=\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=[A\cdot\infty]=\infty.$ 3. $A=0;\ B=\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=[0\cdot\infty].$ 4. $A=\infty, B=\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=[\infty\cdot\infty]=\infty.$
Вычисление предела отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 1. $A,B-$ конечные числа, $B\neq 0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}.$	**Вычисление предела функции** $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ 1. $A,B-$ конечные числа $\Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=A^B.$

2. $A\neq 0;\ B=0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{0}\right]=\infty.$ 3. $A-$конечное число, $B=\infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{A}{\infty}\right]=0.$ 4. $A=\infty, B-$ конечное число $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{B}\right]=\infty.$ 5. $A=0,\ B=0 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$ 6. $A=\infty, B=\infty \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$	2. $0<A<1, B=+\infty \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[A^{+\infty}\right]=0.$ 3. $A>1,\ B=+\infty \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[A^{+\infty}\right]=+\infty.$ 4. $0<A<1, B=-\infty \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[A^{-\infty}\right]=+\infty.$ 5. $A>1,\ B=-\infty \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[A^{-\infty}\right]=0.$ 6. $A=1,\ B=\infty \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[1^{\infty}\right].$ 7. $A=0,\ B=0 \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[0^{0}\right].$ 8. $A=\infty,\ B=0 \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[\infty^{0}\right].$ 9. $A-$конечное число, $B=\pm\infty \Rightarrow$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{g(x)}=\left[A^{\pm\infty}\right]$ – не существует.

Замечание 4.1 При подстановке предельного значения аргумента в функцию, иногда получаем неопределенные выражения, символически обозначаемые как $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Любой предел состоит из трех частей:

а) Знак *Lim*. Иногда пределы так и называют *лимитами.*

б) Запись под знаком предела.

Обычно читается «икс стремится к …». Хотя вместо *x* на практике встречаются и другие переменные.

в) Функция под знаком предела.

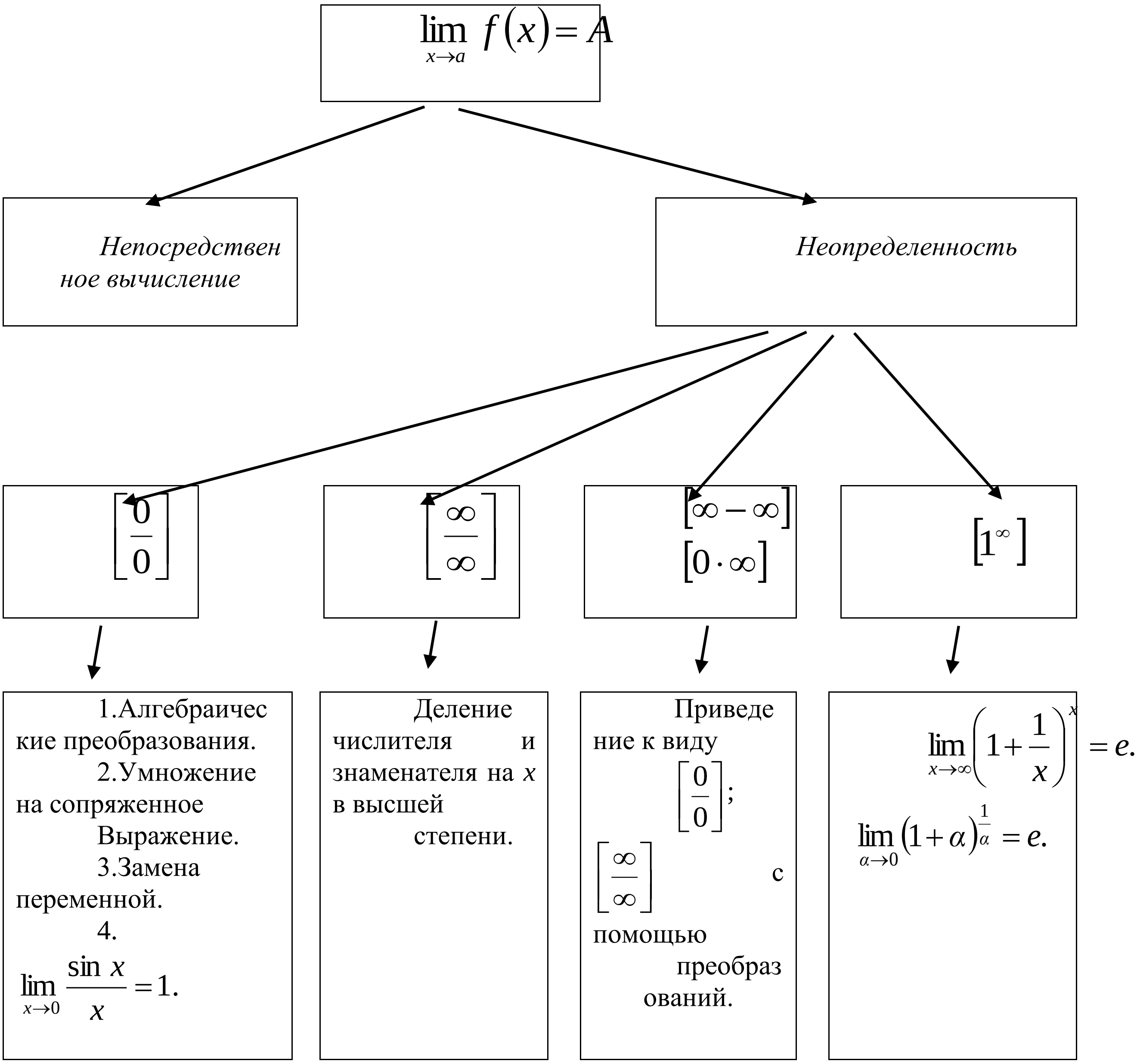
Например, запись $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{3x}$ читается как: «предел функции $\dfrac{x+5}{3x}$ при икс стремящемся к единице».

Замечание 5.1 Если требуется решить предел, то сначала достаточно подставить число, к которому стремится переменная, в функцию.

Например, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{3x}=\dfrac{1+5}{3\cdot 1}=\dfrac{6}{3}=2.$

Рассмотрим схему способов вычисления пределов

Схема 1



Обратимся к тактике вычисления пределов, которую рассмотрим на примерах.

Раскрытие неопределенностей

I. Неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Основной способ вычисления: каждый элемент числителя и знаменателя необходимо разделить на x в наибольшей степени (или вынести за скобки в числителе и знаменателе наибольшую степень x каждого из них).

Пример 5.1

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x+9}{4x^3-7}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x-9}{5x+6}$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+6}{2x^2-4x-9}$

Решение

$$а)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x+9}{4x^3-7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{9}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{7}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{4-\frac{7}{x^3}}=\frac{2+0+0}{4-0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$б)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x-9}{5x\ \ +6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{9}{x^2}}{\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}}{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{2-0-0}{0+0}=$$

$$\frac{2-0-0}{0+0}=\frac{2}{0}=\infty.$$

$$в)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{2x^2-4x-9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{9}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}}=\frac{0+0}{2-0-0}=\frac{0}{2}=0.$$

Замечание 5.2 Если сравнить наивысшие степени x числителя и знаменателя в неопределенностях вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, получаем:

1. ∞, если степень выше в числителе;
2. *0*, если степень выше в знаменателе;
3. отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя, если они равны.

II. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x\to a$

(Дробно-рациональные функции)

Основной способ вычисления: в числителе и знаменателе выделяется множитель $(x-a)$ и рассматривается выражение, получаемое после сокращения на этот множитель.

После этого неопределенность может исчезнуть, в противном случае надо повторить процедуру.

Для разложения на множители используют разные способы: вынесение общего множителя за скобки, деление многочленов, формулы сокращенного умножения и другие тождества.

Замечание 5.3 Полезно вспомнить следующие формулы:

1. $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 - b^3$

5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot b + 3a \cdot b^2 + b^3$

6. $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

7. $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

8. $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Пример 5.2

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$

Решение

$$а)\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)\cdot(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10.$$

$$б)\lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)\cdot(x-2)}{(x-5)\cdot(x-4)} = \lim_{x\to 5} \frac{x-2}{x-4} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$в)\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2\cdot(x-2)+(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2+1} = \frac{4}{5}.$$

III. Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x \to a$

(Дробно-иррациональные функции)

Основной способ вычисления:

а) умножение числителя и знаменателя на множитель, сопряженный множителю, содержащему иррациональность;

б) метод замены переменной

Пример 5.3

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x}+1}$

Решение

а) $$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

$$б)\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}x=t^6\\ x\to1\Rightarrow t\to1\end{bmatrix}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim\limits_{t\to1}\frac{(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot\left(t^2+t+1\right)}=$$

$$==\lim\limits_{x\to1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

в) $$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt[3]{x}+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+11}\right)\cdot\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(\left(\sqrt{x+10}\right)^2-\left(\sqrt{2x+11}\right)^2\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}\right)\cdot(x+1)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+10-2x-11)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}\right)\cdot(x+1)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-(x+1)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}\right)\cdot(x+1)}=$$

$$=-\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+10}+\sqrt{2x+11}}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

IV. Неопределенность вида $[\infty-\infty]$

Основной способ вычисления: преобразование функции к виду дроби и приведением к неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 5.4

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)$

Решение

$$а)\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x-1)}-\frac{2}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)==\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$б)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{\sqrt{x^2+6x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{6}{x}\right)}+x}=$$

$$==\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x\cdot\sqrt{1+\frac{6}{x}}+x}=6\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1\right)}=6\cdot\frac{1}{2}=3.$$

V. Первый замечательный предел

Обычно к первому замечательному пределу сводятся пределы от функций, в которых участвуют тригонометрические выражения.

Первый замечательный предел имеет вид: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Замечание 5.4 Если аргумент *sin* и знаменатель представляют собой одну и ту же функцию, которая стремится к нулю, то имеет место конструкция первого замечательного предела, т. е. $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1.$

Пример 5.5

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$

в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

г) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\cos^2 x-\cos^2 a}$

Решение

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{5\cdot\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot1=5.$

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{5x}{2}\right)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{25}{4}\cdot\sin\dfrac{5x}{2}\cdot\sin\dfrac{5x}{2}}{\dfrac{5x}{2}\cdot\dfrac{5x}{2}}=$

$==2\cdot\dfrac{25}{4}=\dfrac{25}{2}.$

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\cdot\sin3x\cdot5x}{5\cdot3x\cdot\sin5x}=\dfrac{3}{5}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin5x}=\dfrac{3}{5}.$

г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\cos^2x-\cos^2a}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\cos^2x-\cos^2a\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$

$$=\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{(\cos x-\cos a)\cdot(\cos x+\cos a)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{2\cos a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{\cos x-\cos a}=$$

$$=\frac{1}{4\cdot\sqrt{a}\cdot\cos a}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{-2\sin\dfrac{x-a}{2}\cdot\sin\dfrac{x+a}{2}}=-\frac{1}{8\cdot\sqrt{a}\cdot\cos a\cdot\sin a}\cdot\lim\limits_{x\to a}\frac{\dfrac{x-a}{2}\cdot2}{\sin\dfrac{x-a}{2}}=$$

$$-\frac{2}{8\sqrt{a}\cdot\cos a\cdot\sin a}=-\frac{1}{2\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a}\cdot(2\cos a\cdot\sin a)}=-\frac{1}{2\sqrt{a}\cdot\sin2a}.$$

Замечание 5.5 Часто также применяют известные пределы:

$$\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1,\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

VI. Второй замечательный предел

Имеет следующий вид:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Ко второму замечательному часто сводят показательно-степенную неопределенность $\left[1^\infty\right]$

Пример 5.6

Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-3}\right)^{4x}$

в) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{2}{3x}}$

Решение

$$a)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x}}=e^{2}.$$

$$б)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-3}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{8}\cdot\frac{8}{4x-3}\cdot 4x}=e^{32\lim\limits_{x\to\infty}\cdot\frac{x}{4x-3}}=e^{\frac{32}{4}}=e^{8}.$$

$$в)\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{3x}}=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot\frac{5x}{1}\cdot\frac{2}{3x}}=e^{\frac{10}{3}}=\sqrt[3]{e^{10}}.$$

5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Функция $\beta(x)$ называется *бесконечно большой функцией* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=+\infty$, или $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=-\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0}|\beta(x)|=+\infty$.

Замечание 6.1 Если при $x\to x_0$ $\beta(x)$ – бесконечно большая функция, то $\frac{1}{\beta(x)}$ является бесконечно малой функцией; если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A=const,\quad A\neq 0,\ A\neq\infty,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми функциями одного порядка малости при $x\to x_0$.

В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными функциями* при $x\to x_0$ (записывается $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$).

Приведем формулы эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$:

1. $\sin x\sim x$
2. $tgx\sim x$
3. $arc\sin x\sim x$
4. $arcbgx\sim x$
5. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$
6. $\ln(1+x)\sim x$
7. $e^x-1\sim x$
8. $a^x-1\sim x\cdot\ln a, a>0, a\neq 1$
9. $(1+x)^m-1\sim m\cdot x$

10. $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}\cdot x$

Пример 6.1

Вычислите следующие пределы, применяя формулы эквивалентных бесконечно малых функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x^{x}}{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\ln(1-3x)}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sqrt{1+2x-x^{3}}-1}$

Решение

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{10x}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x^{2}}{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\ln(1-3x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^{2}}{\frac{x}{2}\cdot(-3x)}=-\frac{5}{\frac{3}{2}}=-\frac{10}{3}.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sqrt{1+2x-x^{3}}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3x}{2}\right)^{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\left(2x-x^{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{9x^{2}}{4}}{x\cdot\left(2-x^{2}\right)}=$

$==\frac{9}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-x^{2}}=\frac{9}{4}\cdot 0=0.$

6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

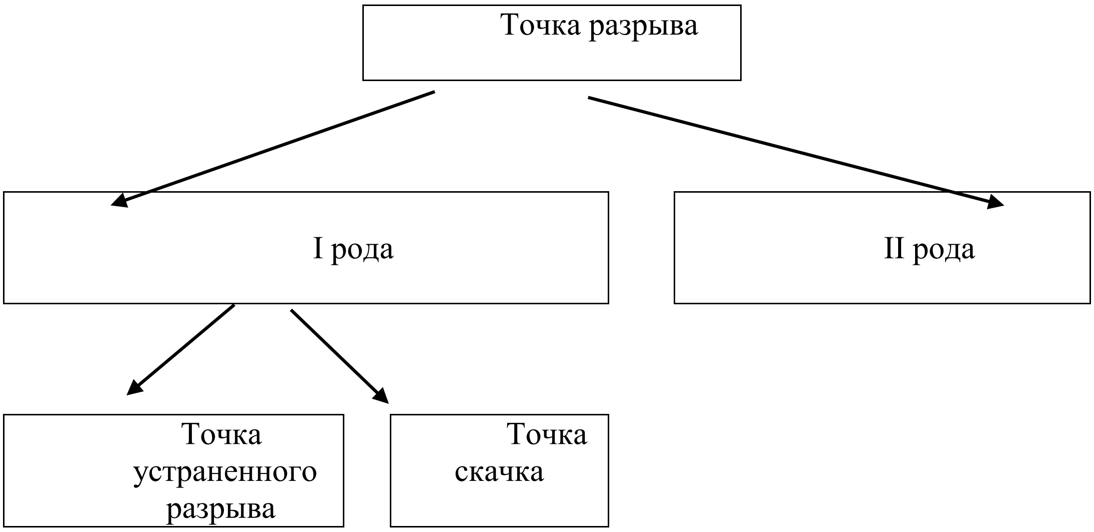
Функция называется *непрерывной* в точке x_0 из области определения функции, если предел ее при $x\to x_0$ существует и равен значению в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, т.е.

1) значение функции $f(x_0)$ существует,

2) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x_0)=f(x_0).$

Точка x_0, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Схема 2



Число A называется пределом *справа* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A\right)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x - x_0 < \delta$ и входящих в область определения $f(x)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел *слева* функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A\right)$.

В случае $x_0 = 0$ будем записывать $x \to +0$ и $x \to -0$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой, то x_0 называется *точкой разрыва I рода*.

Точка устранимого разрыва $\left(f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)\right)$ это точка в которой левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке.

Точка скачка $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ это точка в которой левый и правый пределы функции в точке x_0 различны.

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции в точке x_0.

Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода*. В этих точках не существует хотя один из односторонних пределов.

Пример 7.1

Найдите в указанных точках односторонние пределы следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 1/2, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \le 2, \\ -1, & x > 2. \end{cases}$

б) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0.$

в) $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ при $x\to 4.$

г) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\\ 4\text{-}2x, & 1<x<2{,}5,\\ 2x-7, & 2{,}5\le x<+\infty.\end{cases}$

Решение

а) Область определения функции $x\in(-\infty;+\infty)$

При $x\to 1-0$ $f(x)=x$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}x=1-0=1,$

при $x\to 1+0$ $f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}1=1,$

при $x\to 2-0$ $f(x)=1$ и $\lim\limits_{x\to 2-0}1=1,$

при $x\to 2+0$ $f(x)=-1$ и $\lim\limits_{x\to 2+0}(-1)=-1.$

б) Область определения функции $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$

$$\lim_{x\to +0}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=\infty,$$

$$\lim_{x\to -0}e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

в) Область определения функции $x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty).$

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=\frac{4-0}{4-0-4}=\frac{4}{-0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=\frac{4+0}{4+0-4}=\frac{4}{+0}=+\infty.$$

$x=4-$ точка разрыва II рода.

г) Область определения функции $x\in[0;+\infty)$

исследуем точки $x=1$, $x=2{,}5$

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}2\sqrt{x}=2,$

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(4-2x)=2,$ т.е. $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$

В точке $x=1$ выполняются все условия непрерывности.

$\lim\limits_{x\to 2,5-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2,5-0}(4-2x)=-1,$

$\lim\limits_{x\to 2,5+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 2,5+0}(2x-7)=-2.$

$x=2{,}5-$ точка разрыва I рода – точка скачка.

Скачок функции в этой точке равен

$\lim\limits_{x\to 2,5+0}f(x)-\lim\limits_{x\to 2,5-0}f(x)=-2-(-1)=-1.$

Замечание 7.1 Иногда можно говорить о непрерывности функции $f(x)$ только слева (или только справа): $f(x_0-0)=f(x_0)$ $(f(x_0+0)-f(x_0))$.

Например, функция $f(x)=\sqrt{3-x}$, определенная при $x\le 3$, в точке $x=3$ непрерывна только слева: $f(3-0)=\sqrt{3-(3-0)}=\sqrt{+0}=0$ и $f(3)=\sqrt{3-3}=0$, $f(3-0)=f(3)$, а справа от этой точки функция вообще не определена. Окончательно, $f(x)$ непрерывна на луче $(-\infty;3]$.

7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может самой точки x_0, причем $g'(x)\ne 0$, и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует.

Точка x_0 может быть, как конечной, так и несобственной точкой $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание 8.1 Неопределенности вида $[0\cdot\infty]$ или $[\infty-\infty]$ приводятся к неопределенностям вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ различными алгебраическими преобразованиями.

Замечание 8.2 Если после применения правила Лопиталя снова получается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и для $f'(x)$ и $g'(x)$ выполнены условия, сформулированные для функций $f(x)$ и $g(x)$, правило применяется до тех пор, пока неопределенность не устранится или не обнаружится, что нужные пределы не существуют.

Замечание 8.3 Неопределенности вида $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$ приводятся к неопределенности вида $[0\cdot\infty]$ с помощью предварительного логарифмирования или преобразования, использующего основное логарифмическое тождество

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{\ln(f(x))^{g(x)}}e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

Пример 8.1

Применяя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$

Решение

а) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2\cdot 1+\frac{1}{1}}{e^1}=\frac{3}{e}.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)'}{\left(x+e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)'}{\left(1+e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{x}{2}\right)'}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}}=0.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

г) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{x\cdot\left(e^x-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

д) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x=\left[0^0\right]=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\sin x)^x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x\cdot\ln(\sin x)}$;

Найдем отдельно предел степени при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\ln(\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\sin x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-$$

$$-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=-\lim_{x\to 0}(x\cdot\cos x)=0.$$

Возвращаясь к исходному пределу, будем иметь

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)^x=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\sin x)}=e^0=1.$$

8. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Баллы, которыми оценивается каждая рейтинговая работа, могут быть различными на разных направлениях (баллы определяются, согласно рабочей программы по математике).

Вариант № 1

Вычислите пределы

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+3x-2}$; а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$;

в) $x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot tg2x}{\sin^2 4x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$ (правило Лопиталя)

$\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2 x$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}2-x & \text{при } x\le -2,\\ x^2-1 & \text{при } -2<x\le 1,\\ -2x+3 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Вариант № 2

Вычислите пределы

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-x-10}{7x-x^2-10}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=2$;

в) $x_0=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x\cdot tg2x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$ (правило Лопиталя)

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } x<0,\\ 2^x & \text{при } 0\le x<2,\\ 4 & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$$

Вариант № 3

Вычислите пределы

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; а) $x_0=-3$; б) $x_0=3$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{при } x<0,\\ x^2 & \text{при } 0\le x\le 2,\\ 5-x & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Вариант № 4

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3};$$ а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x\cdot tg2x}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{при } x\le -1,\\ 1+2x & \text{при } -1<x<2,\\ \frac{1}{x-2} & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$$

Вариант № 5

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6};$$ а) $x_0=1$; б) $x_0=-3$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{5x}{arctg 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{1-4^x}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x<1, \\ (x-1)^2 & \text{при } 1\le x\le 2, \\ 3-x & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Вариант № 6

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15};$$ а) $x_0=5$; б) $x_0=-5$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg3x}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6}\right)$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}\le x\le 0, \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{при } 0\le x\le 2, \\ x+1 & \text{при } 2\le x\le 3. \end{cases}$$

Вариант № 7

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3};$$ а) $x_0=1$; б) $x_0=-3$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{при } -1\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{при } 0\le x\le 2,\\ x-1 & \text{при } 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Вариант № 8

Вычислите пределы

$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$; а) $x_0=1$; б) $x_0=3$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-9}-1}{x-10} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot tg3x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{при } -2\le x\le 0,\\ 2x^2-14 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при } 1\le x\le 3.\end{cases}$$

Вариант № 9

Вычислите пределы

$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-7x+10}{x^2-3x+2}$; а) $x_0=-1$; б) $x_0=2$;

в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot\cos 7x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 4x}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-1)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & \text{при } -3\le x\le -1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при } -1\le x\le 2,\\ 1 & \text{при } 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Вариант № 10

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+3x-10}{x^2+4x-5};$$ а) $x_0=5$; б) $x_0=-5$; в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-5^x}{2x-1}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0}x\operatorname{tg}\frac{1}{x}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 & \text{при } -1\le x\le 0,\\ x^2+1 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{при } 1\le x\le 3.\end{cases}$$

Вариант № 11

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-8x+7}{x^2+6x-7};$$ а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x(x-3)} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^{2}-3x+2}\right)$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases} -x^{2} & \text{при } -2\le x\le -1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } -1\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 2\sin x & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi. \end{cases}$$

Вариант № 12

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^{2}-7x+6}{x^{2}-5x-6};$$ а) $x_0=2$; б) $x_0=6$; в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{x^{2}(x+8)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to +\infty} xe^{-2x}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{при } -2\le x\le -1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } -1\le x\le 1, \\ Ln\,x & \text{при } 1\le x\le e. \end{cases}$$

Вариант № 13

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^{2}-6x+8}{x^{2}-8x+12};$$ а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^{2}-25}{2-\sqrt{x-1}}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{10x\cdot\sin x}{\sin^{2}6x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } -2 \le x \le -1, \\ \dfrac{2}{x} & \text{при } -1 \le x \le 1, \\ 3x-1 & \text{при } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Вариант № 14

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9};$$ а) $x_0 = 2$; б) $x_0 = 3$; в) $x_0 = \infty$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{tg^2 4x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{x}\right)$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{при } -2 \le x \le -1, \\ \dfrac{2}{x} & \text{при } -1 \le x \le 1, \\ 2x & \text{при } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Вариант № 15

Вычислите пределы

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12};$$ а) $x_0 = 5$; б) $x_0 = 2$; в) $x_0 = \infty$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 15x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$$ (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$$ (правило Лопиталя)

Исследуйте на непрерывность функцию, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и постройте график функции $y = f(x)$ в области определения:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{при } -2\le x\le 0,\\ \dfrac{1}{x-1} & \text{при } 0\le x\le 2,\\ 1 & \text{при } 2\le x\le 3.\end{cases}$$

Интегральное исчисление

методические указания к практическим занятиям

Глава 1
Первообразная функции и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференционального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции. На практике часто приходится решать обратную задачу: требуется восстановить функцию *F(x)*, зная ее производную *f(x)*. Функцию *F(x)* в этом случае называют первообразной для *f(x).*

Определение 1. Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на заданном промежутке, если для всех *x* из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Пример 1. Функция $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ есть первообразная для функции $f(x)=x^4$ на интервале $(-\infty;\infty)$, так как $F'(x)=\left(\dfrac{x^5}{5}\right)'=\dfrac{1}{5}\left(x^5\right)'=\dfrac{1}{5}\cdot 5\cdot x^4=x^4=f(x)$ для всех $x\in(-\infty;\infty)$.

Пример 2. Функция $F(x)=\dfrac{1}{x}$ не является первообразной для функции $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $(-\infty;\infty)$, так как равенство $F'(x)=f(x)$ не выполнено в точке 0.

Однако в каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;\infty)$ функция *F(x)* является первообразной для *f(x).* Легко заметить, что в примере 1 $\dfrac{x^5}{5}+8$ имеет ту же самую производную x^4 и поэтому также является первообразной для x^4 на R. Ясно, что вместо числа 8 можно подставить любую постоянную. Таким образом, видно, что задача нахождения первообразной имеет бесконечное множество решений.

Определение 2. Если функция *F(x)* – первообразная для функции *f(x)*, то множество функций *F(x)+C*, где С – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначается символом

$$\int f(x)dx=F(x)+c,$$

Где *F(x)* – первообразная;

C - const.

x – независимая переменная интегрирования;

f(x) – подынтегральная функция;

f(x)dx – подынтегральное выражение;

$\int -$ знак интеграла.

Операция нахождения первообразной функции называется ее интегрированием.

Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.

Пример 3. Проверить, что $\int 5x^4dx=x^5+c$.

Дифференцируя результат интегрирования $\left(x^5+c\right)'=5x^4$, получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено, верно.

Глава 2
Таблица основных интегралов

Рассмотрим первоначально основные свойства неопределенного интеграла.

1º. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2º. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3º. Неопределенный интеграл дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.

$$\int dF(x) = F(x)+C,$$

где C – произвольное число.

4º. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,$$

где k – некоторое число.

5º. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

В интегральном исчислении нет общего приема нахождения неопределенного интеграла. Существует несколько методов, которые дают возможность свести заданный интеграл к так называемому табличному. Приведенную таблицу основных интегралов необходимо выучить наизусть.

1. $\int 0dx = c$	10. $\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c, n\neq -1.$	11. $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$	12. $\int\frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c, (0<a\neq 1)$	13. $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot arctgx + c$
5. $\int\frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	14. $\int\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert + c$
6. $\int\sin xdx = -\cos x + c$	15. $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
7. $\int\cos xdx = \sin x + c$	16. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + c$
8. $\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	17. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$
9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	18. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

Обратите внимание на тесную связь этой таблицы с таблицей производных. (Это поможет вам быстрее и легче выучить таблицу).

А также следует запомнить нижеприведенную теорему.

Теорема. Пусть *F*(*x*) некоторая первообразная для функции *f(x),*

$$\text{тогда } \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+c,$$

где k и b – некоторые числа, $k \neq 0$.

Как использовать таблицу и теорему рассмотрим в третьей главе.

Глава 3
Основные методы интегрирования

При интегрировании нет какого – либо общего приема вычисления неопределенных интегралов. Имеется лишь ряд методов, позволяющих свести данный интеграл к табличному. Поэтому для каждого данного интеграла нужно суметь найти подходящий метод, с помощью которого преобразовать данный интеграл к табличному виду, а затем найти его по соответствующей формуле таблицы интегралов. Рассмотрим простейшие методы нахождения неопределенных интегралов.

3.1. Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с помощью таблицы простейших интегралов и основных свойств неопределенных интегралов называется непосредственным интегрированием. При решении таких интегралов используют различные тождественные преобразования подынтегральной функции.

Пример 4. Вычислить интеграл.

$$\int (7\sin x + 4 - x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2-1})dx$$

Применив свойства 4° и 5°, имеем

$$\int\left(7\sin x + 4 - 4x^5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2-1}\right)dx = 7\int \sin x dx + 4\int dx - 4\int x^5 dx + \int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x^2-1}$$

Далее используем основную таблицу интегралов, находим:

$$7\int \sin x dx = 7(-\cos x + c_1) = -7\cos x + 7c_1$$

$$4\int dx = 4(x+c_2) = 4x + 4c_2$$

$$-4\int x^5 dx = -4\cdot\left(\frac{x^{5+1}}{5+1}+c_3\right) = -4\cdot\left(\frac{x^6}{6}+c_3\right) = -\frac{2x^6}{3}+4c_3$$

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + c_4$$

$$-2\int\frac{dx}{x^2-1} = -2\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right) + c_5 = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 2c_5$$

Таким образом,

$$\int\left(7\sin x + 4 - 4x_5 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2-1}\right)dx = -7\cos x + 4x - \frac{2}{3}x^6 + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \left(7c_1 + 4c_2 + 4c_3 + c_4 - 2c_5\right)$$

Обычно произвольные постоянные заменяют одной постоянной**:**

$C = 7c_1+4c_2+4c_3 - 2c_5$

В результате получается, что исходный интеграл равен: 7 $\cos x+4x-\frac{2}{3}x^6+\ln|x|-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

Чтобы сделать проверку полученного ответа, нужно его продифференцировать.

$$\left(-7\cos x+4x-\frac{2}{3}x^6+\ln|x|-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c\right)'=-7\cdot(-\sin x)+4\cdot 1-\frac{2}{3}\cdot 6x^5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2-1}+0=7\sin x+4-$$

$$-4x^5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2-1}\cdot\left|\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=\left(\ln(x-1)-\ln(x+1)\right)'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2}{x^2-1}\right| .$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\frac{4}{x^2+9}dx$.

Интеграл табличный, преобразуем его и решим.

$$\int\frac{4}{x^2+9}dx=4\int\frac{dx}{x^2+3^2}=\frac{4}{3}arctg\frac{x}{3}+c$$

Применили формулу $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a}+c,$ где $a=3$.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int e^x\cdot\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$.

Интеграл не табличный, поэтому применим тождественное преобразование – раскроем скобки.

$$\int e^x\cdot\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx=\int\left(e^x+\frac{e^x\cdot e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx=\int\left(e^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\int e^x dx+\int\frac{dx}{\cos^2 x}=e^x+tgx+c .$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\frac{x^5+3x^3-2}{x}dx$.

Интеграл опять же не табличный, поэтому преобразуем его. Разделим каждое слагаемое числителя на знаменатель.

$$\frac{x^5+3x^3-2}{x}=\frac{x^5}{x}+\frac{3x^3}{x}-\frac{2}{x}=x^4+3x^2-\frac{2}{x}$$

Интеграл можно записать в виде

$$\int\frac{x^5+3x^3-2}{x}dx=\int\left(x^4+3x^2-\frac{2}{x}\right)dx=\int x^4dx+3\int x^2dx-2\int\frac{dx}{x}=\frac{x^5}{5}+\frac{3x^3}{3}-2\ln|x|+c=$$

$$=\frac{x^5}{5}+x^3-2\ln|x|+c .$$

Пример 7. Вычислить $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Преобразуем подынтегральное выражение, возведя скобки в квадрат.

$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$ откуда $\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=1$ (основное тригонометрическое тождество).

$2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin 2\cdot\frac{x}{2}=\sin x$ (синус двойного угла).

Получаем: $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int(1+\sin x)dx=\int 1dx+\int\sin xdx=x-\cos x+c$.

3.2. Метод подстановки (или замены переменной)

Один из основных методов интегрирования, который описывается следующей формулой :

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Метод заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\frac{x}{x^2+1}dx$.

Пусть $x^2+1=t$, тогда найдя производную обеих частей замены, получаем

$2xdx=dt$, $xdx=\frac{dt}{2}$.

Поэтому $\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c$.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$.

Обозначим $1+3\cos x=t$. Тогда $-3\sin xdx=dt$, $\sin xdx=-\frac{dt}{3}$.

Имеем: $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx=\int\frac{\frac{-dt}{3}}{t}=-\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{3}\ln|t|+c=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+c$.

Пример 10. Вычислить интеграл $\int\frac{arctg^{100}x}{1+x^2}dx$.

Пусть $arctgx=t.$ Тогда $\frac{dx}{1+x^2}=dt$.

Следовательно, $\int\frac{arctg^{100}x}{1+x^2}dx=\int t^{100}dt=\frac{t^{101}}{101}+c=\frac{arctg^{101}x}{101}+c$.

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\cos(3x+4)dx$.

Интеграл можно решить, используя теорему (Глава 2). Применим формулу

$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+c$

$\int\cos(3x+4)dx=\frac{1}{3}\sin(3x+4)+c,$ *где* $k=3$, $b=4$.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{2x+5}$.

Искомый интеграл однотипен и решается как вышеуказанный интеграл.

$\int\frac{dx}{2x+5}=\frac{1}{2}\ln|2x+5|+c,$ *где* $k=2$, $b=5$.

3.3. Интегрирование по частям

Применение этого метода основывается на формуле:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x) \text{ или } \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

При ее применении фиксируется разбиение подынтегрального выражения искомого интеграла на два сомножителя (u и dv). При переходе к правой части первый из них дифференцируется $(du = u'dx)$, а второй интегрируется $\left(v = \int dv + c\right)$.

Часто возникает вопрос: как представить подходящим образом подынтегральное выражение *f(x)dx* исходного интеграла в виде *u(x)dv(x).* Общего правила для этого нет. Однако можно пользоваться следующими частными указаниями:

u(x)	*dv(x)*
$\ln kx$ $\arcsin kx$ $\arccos kx$ $arctgkx$ $arcctgkx$	e^{kx} $\sin kx$ $\cos kx$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int x\cdot\ln xdx$.

Пусть $\begin{matrix} u = \ln x \\ dv = xdx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = (\ln x)'dx \\ v = \int xdx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} + c \end{matrix}$

По формуле интегрирования по частям получим:

$$\int x\ln xdx = \left(\frac{x^2}{2}+c\right)\cdot\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2}+c\right)\cdot\frac{1}{x}dx.$$

Решим отдельно полученный интеграл.

$\int\left(\frac{x^2}{2}+c\right)\cdot\frac{1}{x}dx = \int\left(\frac{x}{2}+\frac{c}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int xdx + c\int\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{4} + c\cdot\ln x + c_1$. В итоге имеем:

$$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x + c\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} - c\cdot\ln x + c_1 = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + c_1.$$

Замечание: Анализ полученного решения показывает, что постоянная *C,* возникшая при нахождении v не входит в запись окончательного ответа. Поэтому в дальнейшем, применяя формулу интегрирования по частям и найдя v будем полагать $C = 0$, что несколько упрощает запись решения.

В некоторых случаях для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять более одного раза.

Пример 14. Вычислить интеграл $\int(x^2+5x-4)\cdot\cos xdx$.

Пусть $\begin{matrix} u = x^2+5x-4 \\ dv = \cos x \end{matrix}$, то $\begin{matrix} du = (x^2+5x-4)'dx \\ v = \int\cos xdx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = (2x+5)dx \\ v = \sin x \end{matrix}$

Напоминаем, чтобы выбрать u и dv, используйте частные указания, записанные выше.

$$\int\left(x^2+5x-4\right)\cdot\cos xdx = (x^2+5x-4)\cdot\sin x - \int(2x+5)\cdot\sin xdx$$

Возникший интеграл не является табличным, применим повторно формулу интегрирования по частям.

$$\int(2x+5)\cdot\sin xdx = \begin{bmatrix} u = 2x+5, du = 2dx \\ dv = \sin xdx, v = -\cos x \end{bmatrix} = -(2x+5)\cdot\cos x + 2\int\cos xdx =$$

$= -(2x+5)\cdot\cos x + 2\sin x + c.$

Окончательно имеем:

$$\int (x^2+5x-4)\cdot\cos x dx = (x^2+5x-4)\cdot\sin x + (2x+5)\cdot\cos x - 2\sin x + c\ .$$

На практике метод интегрирования по частям часто комбинируется с другими методами интегрирования.

Пример 15. Найти $\int \ln^2(2x+3)dx$.

Выполним сначала замену переменной: положим $t = 2x+3$.

Тогда $dt = (2x+3)'dx \Rightarrow dt = 2dx$ и $dx = \frac{dt}{2}$, следовательно

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}\cdot\int \ln^2 t dt$$

Пусть $\begin{matrix} u = \ln^2 t \\ dv = dt \end{matrix}$, тогда $\begin{matrix} du = \left(\ln^2 t\right)' dt \\ v = \int dt \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} du = \frac{2\ln t}{t}dt \\ v = t \end{matrix}$

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}\left(t\cdot\ln^2 t - \int\frac{2\ln t\cdot t}{t}dt\right) = \frac{t\ln^2 t}{2} - \int \ln t dt$$

Полагая в формуле интегрирования по частям $u = \ln t, dv = dt,$ получаем

$$\int \ln t dt = t\cdot\ln t - t + c$$

Окончательно имеем:

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{t\ln^2 t}{2} - t\ln t + t + c = \frac{(2x+3)\cdot\ln^2(2x+3)}{2} - (2x+3)\cdot\ln(2x+3) + 2x + c\ .$$

3.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где *P(x) и Q(x)* – многочлены.

Рациональная дробь может быть правильной и неправильной.

Правильная дробь – это дробь, у которой степень многочлена *P(x)* ниже степени многочлена *Q(x).*

Неправильная дробь – это дробь, у которой степень многочлена *P(x)* больше (или равна) степени многочлена *Q(x).*

3.4.1. Интегрирование правильных дробей

Рассмотрим несколько видов правильных дробей.

1 вид:

$\int\frac{A}{x-a} = A\cdot\ln|x-a| + c,$ где A, a – действительные числа.

2 вид:

$\int\frac{Adx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c,$ где m – целое число, больше единицы.

3 вид:

$$\int\frac{dx}{x^2+p\cdot x+q}$$

Для решения этого вида интеграла требуется в знаменателе выделить полный квадрат. А именно: $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$

Пример 16. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 - 4 + 8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\cdot arctg\frac{x+2}{2} + c.$$

Использовали формулу $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + c$.

Пример 17. Вычислить $\int \frac{5dx}{x^2+12x-2}$.

$$5\int \frac{dx}{x^2+12x-2} = 5\int \frac{dx}{(x+6)^2-36-2} = 5\int \frac{dx}{(x+6)^2-38} = 5\int \frac{dx}{(x+6)^2-(\sqrt{38})^2} = 5\int \frac{d(x+6)}{(x+6)^2-(\sqrt{38})^2} =$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{38}}\ln\left|\frac{x+6-\sqrt{38}}{x+6+\sqrt{38}}\right| + c.$$

Использовали формулу: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$.

Пример 18. Вычислить $\int \frac{2dx}{3x^2-9x+15}$.

$$2\int \frac{dx}{3(x^2-3x+5)} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2-3x+5} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot arctg\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + c = \frac{4}{3\sqrt{11}}\cdot arctg\frac{2x-3}{\sqrt{11}} + c.$$

4 вид:

$$\int \frac{Ax+b}{x^2+pq+q}dx$$

При решении таких интегралов можно использовать несколько подходов. Например, сначала выделить полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции, а затем использовать соответствующую замену переменной.

Пример 19. Вычислить $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$.

Поскольку $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, то используем замену переменной $t = x+1$. Тогда $dt = dx$, $x = t-1$.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2\cdot(t-1)+1}{t^2}dt = \int \frac{2t-1}{t^2}dt = \int\left(\frac{2t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt = 2\int\frac{dt}{t} - \int\frac{dt}{t^2} = 2\ln|t| + \frac{1}{t} + c =$$

$$= 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$$

Пример 20. Вычислить $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx.$

Так как $x^2-4x+13=(x-2)^2+9$, то $t = x-2$. Тогда $dt = dx,\ x = t+2$

$$\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx = \int \frac{8-(t+2)}{t^2+9}dt = \int \frac{6-t}{t^2+9}dt = \int \frac{6}{t^2+9}dt = -\int \frac{t}{t^2+9}dt$$

Первый интеграл – табличный

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$$

Второй интеграл можно вычислить по формуле

$$\int \frac{xdx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right|+c$$

Тогда получаем

$$\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx = 2arctg\frac{t}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right|+c = 2arctg\frac{x-2}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+c\,.$$

Можно решить эти же интегралы, используя введение переменной под знак дифференциала.

Например: $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-4x+13\right)}{x^2-4x+13}+6\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$ т.е.

$$-\frac{1}{2}d(x^2-4x+13) = -\frac{1}{2}(2x-4)dx$$

$$-\frac{1}{2}d(x^2-4x+13) = (2-x)dx$$

Решим каждый интеграл отдельно.

$$\int \frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13} = \ln\left|x^2-4x+13\right|+c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+3^2} = \frac{1}{3}arctg\frac{x-2}{3}+c$$

Имеем окончательный ответ:

$$\int \frac{8-x}{x^2-4x+13} = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+13\right|+2arctg\frac{x-2}{3}+c\,.$$

Рассмотренные приемы интегрирования правильных дробей имеют существенный недостаток: он не обобщается в том случае, когда степень знаменателя больше двух.

5 вид:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}\ldots$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,\ M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t,\ N_t\ldots$ - некоторые числа, подлежащие определению. То есть, чтобы решить эти интегралы, нужно разложить знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей. Этот метод называется методом неопределенных коэффициентов.

Пример 21. Найти $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$

Так как $x^3+2x^2-8x = x(x^2+2x-8) = x(x+4)(x-2)$, то

$$\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+4}+\frac{A_3}{x-2}$$

Приведем к общему знаменателю правую часть равенства и затем его отбросим.

$$x^2-2x+2=A_1(x+4)(x-2)+A_2x(x-2)+A_3x(x+4)$$
$$x^2-2x+2=A_1x^2+2A_1x-8A_1+A_2x^2-2A_2x+A_3x^2+4A_3x$$
$$x^2-2x+2=(A_1+A_2+A_3)x^2+(2A_1-2A_2+4A_3)x+(-8A_1).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} A_1+A_2+A_3=1 \\ 2A_1-2A_2+4A_3=-2 \\ -8A_1=2 \end{cases}$$

Откуда $A_1=-\frac{1}{4}, A_2=\frac{13}{12}, A_3=\frac{1}{6}$, тогда

$$\int\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{13}{12}\ln|x+4|+\frac{1}{6}\ln|x-2|+c.$$

3.4.2. Интегрирование неправильных дробей

Если рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то следует предварительно выделить целую часть, т.е. поделить числитель на знаменатель. Алгоритм деления многочленов «углом», известен из школьного курса. В итоге исходная дробь будет представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби. Например, $\frac{x^3-3x+4}{x-2}=x^2+2x+1+\frac{6}{x-2}$

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3-3x+4 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-2x^2} \quad\quad & x^2+2x+1 \\ -\;2x^2-3x \quad & \\ \underline{2x^2-4x} \quad & \\ -\;x+4 & \\ \underline{x-2} & \\ 6 & \end{array}$$

Пример 22. Вычислить $\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$.

Выполним деление под «углом», имеем

$$\begin{array}{r|l} -\; x^3+x^2 \quad\quad & x^2-6x+5 \\ \cline{2-2} & x+7 \\ \underline{x^3-6x^2+5x} & \\ -\;7x^2-5x \quad\quad & \\ \underline{7x^2-42x+35} & \\ 37x-35 & \end{array}$$

Или $\dfrac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}=x+7+\dfrac{37x-35}{x^2-6x+5}$. Тогда:

$$\int\frac{x^3-x^2}{x^2-6x+5}dx=\int xdx+7\int dx+\int\frac{37x-35}{x^2-6x+5}dx=\frac{x^2}{2}+7x+\int\frac{37x-35}{x^2-6x+5}dx.$$

Решим последний интеграл методом неопределенных коэффициентов.

$$\int\frac{37x-35}{x^2-6x+5}dx=\int\frac{37x-35}{(x-1)(x-5)}dx.$$

$$\frac{37x-35}{(x-1)(x-5)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-5}$$

$$37x-35=A_1x-5A_1+A_2x-A_2$$

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} A_1+A_2=37 \\ -5A_1-A_2=-35 \end{cases}$$

Откуда $A_1=-\dfrac{1}{2}$ $A_2=\dfrac{75}{2}$

Откуда $\displaystyle\int\frac{37x-35}{x^2-6x+5}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{75}{2}\int\frac{dx}{x-5}=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{75}{2}\ln|x-5|+c$.

Окончательный ответ следующий:

$$\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx=\frac{x^2}{2}+7x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{75}{2}\ln|x-5|+c.$$

3.4.3. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, где R – рациональная функция

С помощью подстановки $e^x=t$, откуда $e^xdx=dt$, $dx=\dfrac{dt}{e^x}=\dfrac{dt}{t}$, интеграл указанного вида преобразуется в интеграл от рациональной функции. Подынтегральное выражение может быть правильной или неправильной дробью, поэтому метод решения зависит от этого.

Пример 23. Вычислить $\displaystyle\int\frac{e^{5x}}{e^x+1}dx$.

Используем вышеуказанную замену.

$e^x=t, dx=\dfrac{dt}{t}$

Имеем $\displaystyle\int\frac{t^5}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}dx=\int\frac{t^4}{t+1}dt$, получим неправильную дробь.

Выделим целую часть, путем деления числителя на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} -\,t^4 & t+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^4+t^3} & t^3-t^2+t-1 \\ \quad -\,-t^3 & \\ \quad\ \underline{-t^3-t^2} & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
-\,t^2 \\
\underline{t^2 + t} \\
\quad -\,{-t} \\
\quad \underline{-t-1} \\
\qquad 1
\end{array}
$$

$$\int \frac{t^4}{t+1}dt = \int t^3dt - \int t^2dt + \int tdt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + c .$$

Возвращаясь к замене, получаем:

$$\int \frac{e^{5x}}{e^x+1}dx = \frac{e^{4\ x}}{4} - \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln\left|e^x+1\right| + c .$$

3.5. Интегрирование некоторых простейших иррациональных функций

Основной способ решения этих интегралов в замене переменной, что позволяет интегралы от иррациональных функций свести к интегралам от рациональных функций.

Рассмотрим несколько видов интегралов.

1 вид:

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$. Такие интегралы рационализируются заменой переменной $t = \sqrt[n]{x}.$

Пример 24. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$$

$n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $s = 6$, где

$n_1 -$ *степень первого радикала*

$n_2 -$ *степень второго радикала*

$s -$ *наименьшее общее кратное чисел* n_1 *и* n_2.

Применим подстановку $x = t^6, dx = 6t^5dt$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6t^5dt}{\left(t^6\right)^{\frac{1}{2}} + \left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}} = 6\int \frac{t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1}$$

В полученном интеграле подынтегральное выражение есть неправильная дробь. Выделим целую часть и в результате получаем.

$$6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + c \ .$$

Вернемся к замене $t = \sqrt[3]{x}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c .$$

2 вид:

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

В простейших случаях такие интегралы сводятся к табличным. Необходимая замена переменной усматривается после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене ax^2+bx+c.

Пример 25. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Если $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$, то, введя замену $x+1=t, dx=dt,$ получаем

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+c=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c.$$

Пример 26. Вычислить $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx.$

$x^2+2x+5=(x+1)^2+4,$ положим $x+1=t$

Тогда $x=t-1, dx=dt,$ и, следовательно,

$$\int\frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{3\cdot(t-1)+2}{\sqrt{t^2+4}}dt=\int\frac{3t-1}{\sqrt{t^2+4}}dt=3\int\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=3\sqrt{t^2+4}-\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+$$

$$+c=[t=x+1]=3\sqrt{(x+1)^2+4}-\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|+c=3\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c.$$

В более сложных случаях для нахождения интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ используются подстановки Эйлера.

3.6. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Интегралы от тригонометрических функций во многих ситуациях удается рационализировать либо существенно упростить. Рассмотрим наиболее типичные ситуации.

3.6.1. Интеграл вида $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ где *R* – рациональная функция.

Вычисление неопределенных интегралов этого типа сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t,$ которая называется универсальной. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x=\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2arctgt; dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату. На практике применяются и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств (и вида) подынтегральной функции.

А именно $\cos x=t, \sin x=t$ или $tgx=t$

Пример 27. Вычислить $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

Применим универсальную подстановку.

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{10t+6}{1+t^2}}=2\int \frac{dt}{10t+6}=$$

$$=\frac{2}{10}\ln|10t+6|+c=\frac{1}{5}\ln|10t+6|+c.$$

Вернемся к замене и получаем результат:

$$\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}=\frac{1}{5}\ln\left|10tg\frac{x}{2}+6\right|+c.$$

Пример 28. Вычислить $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x+4}$.

Используем более простую замену $\cos x=t,-\sin xdx=dt,\sin xdx=-dt$.

Имеем,

$$\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x+4}=-\int \frac{dt}{t^2+4}=-\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+c=-\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\cos x}{2}\right)+c.$$

3.6.2. Интегралы вида $\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

Подстановка $\sin x=t,$ если n – целое положительное нечетное число.

Подстановка $\cos x=t,$ если m – целое положительное нечетное число.

Если m и n – целые неотрицательные одновременно четные числа, то используют формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Подстановка $tgx=t,$ если $m+n$ – есть четное отрицательное целое число.

Пример 29. Вычислить $\int \sin^4 x\cdot\cos^5 xdx.$

Полагая, $\sin x=t,\cos xdx=dt,$ получим.

$$\int \sin^4 x\cdot\cos^5 xdx.=$$

$$\int \sin^4 x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)^2\cdot\cos xdx=\int t^4\cdot\left(1-t^2\right)^2 dt=\int\left(t^4-2t^6+t^8\right)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{7}\cdot t^7+$$

$$+\frac{1}{9}\cdot t^9+c=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c.$$

Пример 30. Вычислить $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 xdx$.

$$\int \sin^4 x\cdot\cos^2 xdx=\int(\sin x\cdot\cos x)^2\cdot\sin^2 xdx=\int\frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx-\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c.$$

3.6.3. Интегралы вида $\int tg^m x dx$ и $\int ctg^m x dx$

При нахождении таких интегралов применяется формула: $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ или $ctg^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, с помощью которой последовательно понижается степень tgx и $ctgx$.

Пример 31. Найти $\int tg^5 x dx$

$$\int tg^5 x dx = \int tg^3 x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int tg^3 x \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int tg^3 x dx = \int tg^3 x d(tgx) -$$

$$- \int tgx \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx d(tgx) + \int tgx dx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + c$$

3.6.4. Интеграл вида $\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \int \cos mx \cdot \cos nx dx, \int \sin mx \cdot \sin nx dx.$

Для решения этих интегралов используют тригонометрические формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Пример 32. Вычислить $\int \sin 3x \sin x dx.$

$$\int \sin 3x \sin x dx. = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + c.$$

Глава 4
«Неберущиеся» интегралы

Как известно всякая непрерывная функция имеет первообразную. Но бывают случаи, когда первообразная некоторой элементарной функции *f(x)* не является также элементарной функцией.

По этой причине соответствующие неопределенные интегралы называются «неберущимися» в элементарных функциях, а сами функции – неинтегрируемыми в конечном виде. Например, $\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx$ – «неберущиеся» т.е. не существует такой элементарной функции *f(x)*, что $f'(x) = e^{-x^2}$, $f'(x) = \sin x^2$ и т.д.

Указанные «неберущиеся» интегралы, по крайней мере, не могут быть найдены с помощью вышеуказанных методов вычисления. Однако это не означает, что указанные интегралы не существуют или их невозможно найти.

Глава 5

Список заданий для самостоятельной работы

5.1 $\int e^{3x}\cdot 3^x\,dx$

5.2 $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

5.3 $\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx$

5.4 $\int\frac{5x^8+1}{x^4}dx$

5.5 $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

5.6 $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$

5.7 $\int 4x\left(3+\frac{4}{\sqrt{x^3}}\right)dx$

5.8 $\int\sin x\cdot e^{\cos x}dx$

5.9 $\int\frac{3-4x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}dx$

5.10 $\int(x+4)\sin x\,dx$

5.11 $\int\arcsin x\,dx$

5.12 $\int\left(x^2+7x+5\right)\cos 2x\,dx$

5.13 $\int(2x+1)^2e^{-x}dx$

5.14 $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

5.15 $\int\frac{\cos 3x}{3+\sin 3x}dx$

5.16 $\int\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$

5.31 $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$

5.32 $\int\frac{x^2+2x+7}{(x-2)(x^2+1)}dx$

5.33 $\int\frac{x^3+5}{x(x^2+x+1)}dx$

5.34 $\int\frac{x^2+x+1}{x(x^3+8)}dx$

5.35 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$

5.36 $\int\frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$

5.37 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$

5.38 $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

5.39 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+4\right)}$

5.40 $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}}$

5.41 $\int\frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$

5.42 $\int\frac{dx}{1-\sin x}$

5.43 $\int\sin^3 x\,dx$

5.44 $\int tg^5 2x\,dx$

5.17 $\int (3+4x)^{10}\,dx$

5.18 $\int x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3-8}\,dx$

5.19 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

5.20 $\int \frac{dx}{9x^2-1}$

5.21 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$

5.22 $\int \frac{5dx}{x^2-2x+4}$

5.23 $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

5.24 $\int \frac{dx}{2x^2-6x+7}$

5.25 $\int \frac{x+2}{x^2-x+3}\,dx$

5.26 $\int \frac{x+2}{2x+3}\,dx$

5.27 $\int \frac{x\,dx}{3x^2+x+1}$

5.28 $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$

5.29 $\int \frac{dx}{1-x^3}$

5.30 $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

5.45 $\int \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)dx$

5.46 $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

5.47 $\int \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$

5.48 $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x+2}$

5.49 $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$

5.50 $\int ctg^3 5x\,dx$

5.51 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

5.52 $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$

5.53 $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

5.54 $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}\,dx$

5.55 $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

5.56 $\int x^2 arctg(2x+1)\,dx$

5.57 $\int \frac{e^{5x}}{e^x+1}\,dx$

5.58 $\int \frac{x^3}{x-2}\,dx$

5.59 $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x\,dx$

5.60 $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^{10}}}\,dx$

Глава 6

Типовые расчетные задания

Вариант 1

1. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx$
2. $\int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x}dx$
3. $\int (4-3x)e^{-3x}dx$
4. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$
5. $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
6. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{8\sin^2 x-16\sin x\cos x}$
8. $\int \cos^4 3x\sin^2 3xdx$
9. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}dx$

Вариант 2

1. $\int \frac{9-2x}{4+x^2}dx$
2. $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$
3. $\int arctg 2xdx$
4. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$
5. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$
6. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x-8\sin x\cos x}$
8. $\int \sqrt[5]{\sin^4 x}\cos^3 3xdx$
9. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx$

Вариант 3

1. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx$
2. $\int \frac{\sin 3x}{3-\cos 3x}dx$
3. $\int (3x+4)e^{3x}dx$
4. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$
5. $\int \frac{6x}{x^3-1}dx$
6. $\int \frac{3\sin x-2\cos x}{1+\cos x}dx$
7. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$
8. $\int \cos^3 x\sin^8 xdx$
9. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt{x}}dx$

Вариант 4

1. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$
2. $\int \frac{e^x}{2e^x+3}dx$
3. $\int (4x-2)\cos 2xdx$
4. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$
5. $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$
6. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$
7. $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$
8. $\int \cos^4 x\sin^3 xdx$
9. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^4}}dx$

Вариант 5

1. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx$
2. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x-4}dx$
3. $\int (5x-2)e^{3x}dx$
4. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx$
5. $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
6. $\int \frac{dx}{10\sin x+5\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+3\cos^2 x}$
8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}dx$
9. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[9]{x^8}}dx$

Вариант 6

1. $\int \frac{x+5}{\sqrt{16-x^2}}dx$
2. $\int \frac{e^x}{4-3e^x}dx$
3. $\int (4-16x)\sin 4x dx$
4. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$
5. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx$
6. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$
7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$
8. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x dx$
9. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\cdot\sqrt[9]{x^5}}dx$

Вариант 7

1. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx$
2. $\int \frac{x^2}{7-5x^3}dx$
3. $\int (1-6x)e^{2x}dx$
4. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$
5. $\int \frac{5x+13}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$
6. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$
8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$

Вариант 8

1. $\int \frac{7x-2}{2x^2+9}dx$
2. $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx$
3. $\int \arcsin 3x dx$
4. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x-1)(x^2-1)}dx$
5. $\int \frac{2x^2+4x+20}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
6. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$
8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x}\,)^2}}{x \cdot \sqrt[6]{x^5}} dx$

Вариант 9

1. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$
2. $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}} dx$
3. $\int arctg 8x dx$
4. $\int \frac{2x^3+2x^2+4x+3}{x^3+x^2} dx$
5. $\int \frac{8dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$
6. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$
7. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx$
8. $\int \frac{3\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}} dx$
10. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx$

Вариант 10

1. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-5}} dx$
2. $\int \frac{4x^3}{7+2x^4} dx$
3. $\int (2-4x)\sin 2x dx$
4. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x} dx$
5. $\int \frac{4x^2+38}{(x+2)(x^3-2x+10)} dx$
6. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$
7. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$
8. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$
9. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} dx$
10. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} dx$

Вариант 11

1. $\int \frac{x-3}{9x^2+7} dx$
2. $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17} dx$
3. $\int arctg 7x dx$
4. $\int \frac{x^3-4x^2+2x-1}{x^3-x^2} dx$
5. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$
6. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$
7. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$
8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx$

Вариант 12

1. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{16-3x^2}} dx$
2. $\int \frac{7x^3}{2x^4-5} dx$
3. $\int (4x-3)e^{-2x} dx$
4. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$
5. $\int \frac{x^2+7x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$
6. $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\sin x\cos x}$
8. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}}{x\cdot\sqrt[8]{x^7}}dx$

Вариант 13

1. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$

2. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{\sin 3x-2}}dx$

3. $\int (2-9x)e^{-3x}dx$

4. $\int \frac{4xdx}{\left(x^2-1\right)\left(x+1\right)}$

5. $\int \frac{x^2+23}{\left(x+1\right)\left(x^2+6x+13\right)}dx$

6. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$

7. $\int \frac{\sin 2x}{4\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

8. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 xdx$

9. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x+3}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^3}}{x^2\cdot\sqrt[6]{x}}dx$

Вариант 15

1. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

2. $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$

3. $\int \arccos 2xdx$

4. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$

5. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$

6. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$

8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}}{x\cdot\sqrt[12]{x^7}}dx$

Вариант 14

1. $\int \frac{8x+2}{4x^2+3}dx$

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$

3. $\int \ln\left(x-7\right)dx$

4. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{\left(x^2+x\right)\left(x+1\right)}dx$

5. $\int \frac{4x-10}{\left(x+2\right)\left(x^2-2x+10\right)}dx$

6. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$

8. $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x}\sin^3 2xdx$

9. $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\left(x+1\right)\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)}dx$

10. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}dx$

Вариант 16

1. $\int \frac{7-4x}{\sqrt{1+9x^2}}dx$

2. $\int \frac{\sin 2x}{4-\sin^2 x}dx$

3. $\int \arccos 7xdx$

4. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$

5. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$

6. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-2}$

8. $\int \sin^2 2x\cos^4 2xdx$

9. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{2\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}}{x^2\cdot\sqrt[4]{x}}dx$

Вариант 17

1. $\int \frac{5-x}{2+x^2}dx$
2. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx$
3. $\int (5x+6)\cos 2x dx$
4. $\int \frac{x^3-3}{(x^2-1)(x-1)}dx$
5. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
6. $\int \frac{2-\sin x+3\cos x}{1+\cos x}dx$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}$
8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$
10. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt{x}\right)^4}}{x\cdot\sqrt[10]{x^9}}dx$

Вариант 18

1. $\int \frac{3+5x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$
2. $\int \frac{x^2}{7+3x^3}dx$
3. $\int (3x-2)\cos 5x dx$
4. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(x+1)}dx$
5. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$
6. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x}$
8. $\int \sin^3 x\cdot\sqrt[5]{\cos^4 x}dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$
10. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4}}{x\cdot\sqrt[5]{x^3}}dx$

Вариант 19

1. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx$
2. $\int \frac{3x+3}{x^2+2x}dx$
3. $\int (2x-3)\cos 2x dx$
4. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx$
5. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$
6. $\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$
8. $\int \sin^4 2x\cdot\cos^2 2x dx$

Вариант 20

1. $\int \frac{3+x}{7+x^2}dx$
2. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}}dx$
3. $\int (4x+7)\cos 3x dx$
4. $\int \frac{2x^4-4x^3+2x^2-4x+1}{x(x+1)^2}dx$
5. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$
6. $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x}dx$
7. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+4\cos^4 x}dx$
8. $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^4}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^2 \cdot \sqrt[20]{x^7}}dx$

Вариант 21

1. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx$
2. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x-10}dx$
3. $\int (2x-5)\cos 4x dx$
4. $\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2}dx$
5. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$
6. $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{16\sin^2 x+7\cos^2 x}$
8. $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}dx$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$
10. $\int \frac{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^{-\frac{1}{5}}}{x^2 \cdot \sqrt[25]{x^{11}}}dx$

Вариант 22

1. $\int \frac{11x+4}{\sqrt{x^2-9}}dx$
2. $\int \frac{x^5}{3x^6-7}dx$
3. $\int (8-3x)\cos 5x dx$
4. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$
5. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$
6. $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$
7. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3}$
8. $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$
9. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$
10. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}}dx$

Вариант 23

1. $\int \frac{1-10x}{1+100x^2}dx$
2. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+3}}dx$
3. $\int (x+5)\sin 3x dx$
4. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx$
5. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$
6. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$
7. $\int \frac{dx}{3-2\sin^2 x}$

Вариант 24

1. $\int \frac{x-2}{\sqrt{36-x^2}}dx$
2. $\int \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x}}dx$
3. $\int (2-3x)\sin 2x dx$
4. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$
5. $\int \frac{36dx}{(x+2)(x^2-2x+10)}$
6. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

8. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \cdot \sqrt[15]{x}}dx$

7. $\int \frac{3tgx-1}{\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$

8. $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}dx$

Вариант 25

1. $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx$

2. $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt{5-\sin 7x}}dx$

3. $\int \arcsin 5x dx$

4. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$

5. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$

6. $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{5+3\sin^2 x}$

8. $\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^2}}dx$

Вариант 26

1. $\int \frac{7+2x}{1+49x^2}dx$

2. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x+3}}dx$

3. $\int \ln(x+8)dx$

4. $\int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx$

5. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$

6. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

7. $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x}dx$

8. $\int \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

9. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x}}dx$

Вариант 27

1. $\int \frac{x-4}{\sqrt{4-x^2}}dx$

2. $\int \frac{12x^2+5x^4}{4x^3+x^5}dx$

3. $\int (4x+3)\sin 5x dx$

4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx$

5. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$

Вариант 28

1. $\int \frac{36x+25}{\sqrt{x^2+2}}dx$

2. $\int \frac{4e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

3. $\int (7x-10)\sin 4x dx$

4. $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x^2-1)}dx$

5. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$

6. $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$

7. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$

8. $\int \sin^5 x \cdot \sqrt[5]{\cos^3 x}\,dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}dx$

Вариант 29

1. $\int \frac{3-7x}{1+x^2}dx$

2. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{6-\cos^2 x}}dx$

3. $\int \ln\left(x+12\right)dx$

4. $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$

5. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$

6. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$

7. $\int \frac{tgx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}dx$

8. $\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}dx$

6. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$

7. $\int \frac{dx}{6-3\cos^2 x}$

8. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\cdot\sqrt[12]{x^5}}dx$

Вариант 30

1. $\int \frac{x+3}{\sqrt{64-x^2}}dx$

2. $\int \frac{7x}{\sqrt{5x^2-4}}dx$

3. $\int \ln\left(2x-1\right)dx$

4. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$

5. $\int \frac{3x+13}{\left(x-1\right)(x^2+2x+5)}dx$

6. $\int \frac{dx}{2+\sin x-3\cos x}$

7. $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x-\cos^2 x}dx$

8. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\left(\sqrt[3]{3x+1}+1\right)\sqrt{x+1}}dx$

10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\cdot\sqrt[15]{x^4}}dx$

Приложение 1

Планируемые результаты обучения для формирования компетенции и критерии их оценивания

Дисциплина Математика

Код, направление подготовки 21.03.01. Нефтегазовое дело

Направленность (профиль) Проектирование, сооружение и эксплуатация нефтегазотранспортных систем

Код компетенции	Код, наименование ИДК	Код и наименование результата обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения (в баллах)			
			Менее 61	61 – 75	76 – 90	91 - 100
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Осуществляет выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи	Знать: З1 актуальные российские и зарубежные источники по дисциплине	Не знает актуальные российские и зарубежные источники по дисциплине	Удовлетворительно актуальные российские и зарубежные источники по дисциплине	Хорошо актуальные российские и зарубежные источники по дисциплине	Отлично (комплексно) знает актуальные российские и зарубежные источники по дисциплине
		Уметь: У1 осуществлять выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи	Не умеет осуществлять выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи	Удовлетворительно осуществлять выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи	Хорошо умеет осуществлять выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи	Отлично, без помощи преподавтеля умеет осуществлять выбор актуальных российских и зарубежных источников, а также поиск, сбор и обработку информации, необходимой для решения поставленной задачи
		Владеть: В1 навыками поиска, сбора и обработки информации, необходимой для решения поставленной задачи	Не владеет навыками поиска, сбора и обработки информации, необходимой для решения поставленной задачи	Удовлетворительно владеет навыками поиска, сбора и обработки информации, необходимой для решения поставленной задачи	Хорошо владеет навыками поиска, сбора и обработки информации, необходимой для решения поставленной задачи	Отлично (комплекно) навыками поиска, сбора и обработки информации, необходимой для решения поставленной задачи
УК-2. Способен определять круг задач в	УК-2.1. Проводит анализ поставленной	Знать: З2 цель и совокупность взаимосвязанных задач,	Не знает цель и задачи, которые	Удовлетворительно знает цель и задачи, которые	Хорошо знает цель и задачи, которые	Отлично знает и самостоятельно ставит цель и

рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	цели и формулирует совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	которые необходимо решить для ее достижения	необходимо решить	необходимо решить	необходимо решить	задачи, которые необходимо решить
		Уметь: У2 проводить анализ поставленной цели и формировать совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Не умеет проводить анализ поставленной цели и формировать совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Удовлетворительно умеет проводить анализ поставленной цели и формировать совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Хорошо умеет проводить анализ поставленной цели и формировать совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Отлично умеет проводить анализ поставленной цели и формировать совокупность взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения
		Владеть: В2 навыком постановки проанализированной цели и формирования совокупности взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Не владеет навыком постановки проанализированной цели и формирования совокупности взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Удовлетворительно владеет навыком постановки проанализированной цели и формирования совокупности взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Хорошо владеет навыком постановки проанализированной цели и формирования совокупности взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения	Отлично владеет навыком постановки проанализированной цели и формирования совокупности взаимосвязанных задач, которые необходимо решить для ее достижения
	УК-2.2. Выбирает оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Знать: З3 оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Не знает оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Удовлетворительно знает оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Хорошо знает оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Отлично знает оптимальный способ решения задач, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений
		Уметь: У3 решать задачи, выбирая оптимальный способ вычисления, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Не умеет решать задачи и выбирать оптимальный способ вычисления	Удовлетворительно умеет решать задачи и выбирать оптимальный способ вычисления	Решает задачи и умеет выбирать оптимальный способ вычисления, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений. Но допускает определенные погрешности и ошибки	Самотоятельно, без посторонней помощи умеет решать задачи и выбирать оптимальный способ вычисления, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений
		Владеть: В3 навыком решения задач, выбирая оптимальный способ вычисления, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений	Не владеет навыком решения задачи и выбора оптимальный способ вычисления	Удовлетворительно владеет навыком решения задачи и выбора оптимальный способ вычисления	Хорошо владеет навыком решения задачи и выбора оптимальный способ вычисления	Отлично владеет навыком решения задачи и выбора оптимальный способ вычисления

ОПК-1. Способен решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания	ОПК.Я-1.1. Демонстрирует знание основных законов естественных и математических наук для решения типовых задач	Знать: З4 основные законы естественных и математических наук для решения типовых задач	Не знает основные законы естественных и математических наук для решения типовых задач	Удовлетворительно знает основные законы естественных и математических наук для решения типовых задач	Хорошо знает основные законы естественных и математических наук для решения типовых задач	Отлично знает основные законы естественных и математических наук для решения типовых задач
		Уметь: У4 решать типовые задачи с применением основных законов естественных и математических наук	Не умеет решать типовые задачи с применением основных законов естественных и математических наук	Только с постоянной помощью преподавателя может решать типовые задачи с применением основных законов естественных и математических наук	Решает типовые задачи с применением основных законов естественных и математических наук, но иногда требуется помощь преподавателя	Самостоятельно умеет решать типовые задачи с применением основных законов естественных и математических наук
		Владеть: В4 навыками решения типовых задач	Не владеет навыками решения типовых задач	Владеет отдельными навыками решения типовых задач	Хорошо владеет навыками решения типовых задач	В совершенстве владеет навыками решения типовых задач
	ОПК-1.3. Представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)	Знать: З5 представление базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических процессов и явлений	Нет знаний базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений	Удовлетворительно знает базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений	Хорошо представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений	Комплексно (отлично) представляет базовые для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математических уравнений
		Уметь: У5 применять математический аппарат при решении базовых физических процессов и явлений	Не умеет применять математический аппарат при решении базовых физических процессов и явлений	Удовлетворительно умеет применять математический аппарат при решении базовых физических процессов и явлений	Хорошо умеет применять математический аппарат при решении базовых физических процессов и явлений	Отлично умеет применять математический аппарат при решении базовых физических процессов и явлений
		Владеть: В5 навыками в применении математического аппарата при представлении базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)	Не владеет навыками в применении математического аппарата при представлении базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)	Удовлетворительно владеет навыками применении математического аппарата при представлении базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)	Хорошо владеет навыками применении математического аппарата при представлении базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)	Отлично владеет навыками применении математического аппарата при представлении базовых для профессиональной сферы физических процессов и явлений в виде математического(их) уравнения(й)
	ОПК-1.5. Решает инженерные	Знать: З6 теоретические основы	Не знает теоретические основы	Удовлетворительно знает теоретические	Хорошо знает теоретические основы	Отлично знает теоретические основы

	задачи с помощью математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	основы математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии	математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии
		Уметь: У6 применять знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Не умеет применять знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Удовлетворительно применяет знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Хорошо применяет знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Отлично применяет знания математического аппарата векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач
		Владеть: В6 математическим аппаратом векторной алгебры, аналитической геометрии при решении инженерных задач	Не владеет навыками решения инженерных задач	Имеет удовлетворительные навыки решения инженерных задач	Имеет хорошие навыки решения инженерных задач	Отлично владеет навыками решения инженерных задач
	ОПК-1.6. Решает уравнения, описывающие основные физические процессы, с применением методов линейной алгебры и математического анализа	Знать: З7 методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Не знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Удовлетворительно знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Хорошо знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Отлично знает методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
		Уметь: У7 применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Не умеет применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Удовлетворительно умеет применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Хорошо умеет применять методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы	Отлично применяет методы линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические процессы
		Владеть: В7 методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные физические	Не владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные	Удовлетворительно владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные	Хорошо владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные	Отлично владеет методами линейной алгебры и математического анализа для решения уравнений, описывающих основные

		процессы	физические процессы	физические процессы	физические процессы	физические процессы
	ОПК-1.7. Обрабатывает расчетные и экспериментальные данные вероятностно-статическими методами	Знать: З8 вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Не знает вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Удовлетворительно знает вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Хорошо знает вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Отлично знает вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных
		Уметь: У8 применять вероятностно-статистические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Не умеет применять вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Удовлетворительно применяет вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных	Применяет на практике вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных, но с помощью преподавателя	Самостоятельно, без помощи преподавателя, применяет на практике вероятностно-статические методы для обработки расчетных и экспериментальных данных
		Владеть: В8 вероятностно-статистическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных	Не владеет вероятностно-статическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных	Удовлетворительно владеет вероятностно-статическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных	Хорошо владеет вероятностно-статическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных, с помощью преподавателя	Отлично владеет вероятностно-статическими методами для обработки расчетных и экспериментальных данных

Приложение 2

КАРТА

обеспеченности дисциплины (модуля) учебной и учебно-методической литературой

Дисциплина Математика

Код, направление подготовки 21.03.01. Нефтегазовое дело

Направленность (профиль) Проектирование, сооружение и эксплуатация нефтегазотранспортных систем

№ п/п	Название учебного, учебно-методического издания, автор, издательство, вид	Количество экземпляров в БИК (г. Сургут)	Контингент обучающихся, использующих указанную литературу	Обеспеченность обучающихся литературой, %	Наличие электронного варианта в ЭБС (+/-)
1	Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов : в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, [б. г.]. — Том 2 : Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159505	Электронный вариант	30	100%	+
2	Канатников, А. Н. Математика в техническом университете : учебник : в 21 выпуск / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017 — Выпуск 3 — 2017. — 392 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/106543	Электронный вариант	30	100%	+
3	Иляшенко, Л. К. Основы математической статистики [Текст] : учебное пособие / Л. К. Иляшенко. – Тюмень: ТИУ, 2017. – 78 с. http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/data/2017/09/08/17826.pdf	20	30	100%	+
4	Иляшенко, Л. К. Математика (Элементы теории вероятностей): И 49 учебное пособие / Л. К. Иляшенко. – Тюмень: ТИУ, 2016. – 94 с. http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/2017/04/16633.pdf	20	30	100%	+
5	Иляшенко Л. К. Краткий курс по математике. Типовые расчеты:	20	30	100%	+

	учебное пособие / Л. К. Иляшенко. – Тюмень: ТИУ, 2016. – 104 с. http://elib.tyuiu.ru/wp-content/uploads/2017/01/4902016.pdf				
6	Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты : учебное пособие для вузов / Л. А. Кузнецов. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 240 с. — ISBN 978-5-8114-9032-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/183616	Электронный вариант	30	100%	+
7	Иляшенко, Л. К. Методы вычисления неопределенных и определенных интегралов: учебное пособие / Л. К. Иляшенко. – Тюмень: ТИУ, 2021. – 82 с. – Текст : непосредственный. http://webirbis.tsogu.ru/cgi-bin/irbis64r_plus/cgiirbis_64_ft.exe	20	30	100%	+

Дополнения и изменения
к рабочей программе дисциплины (модуля)

____

на 20_ - 20_ учебный год

С учётом развития науки, практики, технологий и социальной сферы, а также результатов мониторинга потребностей работодателей, в рабочую программу вносятся следующие дополнения (изменения):

№	Вид дополнений/изменений	Содержание дополнений/изменений, вносимых в рабочую программу

Дополнения и изменения внес:

____

(должность, ученое звание, степень) *(подпись)* *(И.О. Фамилия)*

Дополнения (изменения) в рабочую программу рассмотрены и одобрены на заседании кафедры ______________________________.

(наименование кафедры)

Протокол от «____» __________20__ г. № _____.

Заведующий кафедрой________________ И.О. Фамилия.

СОГЛАСОВАНО:

Заведующий выпускающей кафедрой/
Руководить образовательной программы ________________ И.О. Фамилия.

«______» __________ 20___ г.